This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

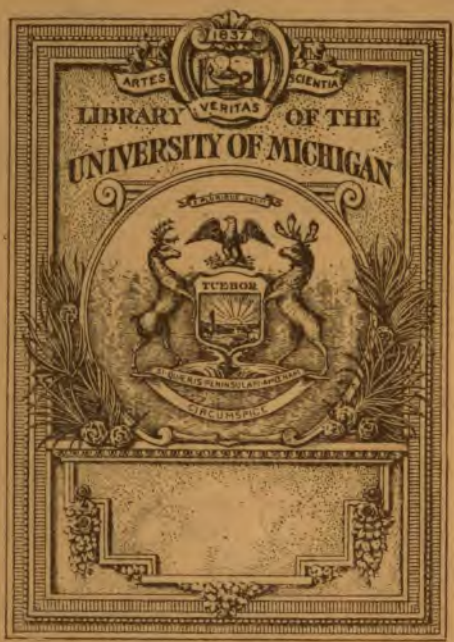
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

3116

Alexander Ziwet

10.6

EINFÜHRUNG IN DIE VEKTORANALYSIS

MIT ANWENDUNGEN AUF DIE MATHEMATISCHE PHYSIK

VON

Dr. RICHARD GANS

PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT TÜBINGEN

MIT 31 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1905

Prof. Alex. Zinvet
qt.
3-2-1923

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

HERRN

PROFESSOR DR. HEINRICH WEBER

WIDME ICH EHRFURCHTSVOLL DIESES BUCH

IN DANKBARER ERINNERUNG

AN MEINE STRASSBURGER STUDIENJAHRE

418794

Vorwort.

Es könnte vielleicht überflüssig erscheinen, ein Lehrbuch der Vektoranalysis auf den Markt zu bringen, da wir bereits solche haben, die auch die Bedürfnisse der mathematischen Physik berücksichtigen. Ich brauche nur an A. Föppl „Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität", Leipzig 1894 oder an A. H. Bucherer „Elemente der Vektoranalysis", Leipzig 1903 zu erinnern.

Da jedoch durch die Entwickelung der Elektrodynamik für bewegte Körper und der Elektronentheorie immer mehr Anforderungen an den Leser gestellt werden, was die Beherrschung der vektoranalytischen Methoden anbetrifft, so schien es mir nicht unangebracht, ein Buch zu schreiben, welches gerade auf die Bedürfnisse dieser Wissenszweige zugeschnitten wäre, denn es ist ganz unzweifelhaft, daß die wichtigen Resultate auf den obengenannten Gebieten von vielen nur deshalb nicht sicher übersehen werden, weil ihnen die Rechenmethoden nicht geläufig genug sind; ferner steht es fest, daß diejenigen, welche die Absicht haben, die neuere Literatur, und das, was noch zu erwarten steht, sich gründlich und möglichst bequem anzueignen, oder auf dem Gebiete der theoretischen Elektrizität selbständig zu arbeiten, vor allen Dingen für ordentliches Handwerkszeug sorgen müssen, d. h. für die Kenntnis der Vektoranalysis.

Denn in der Elektrodynamik, in der es sich um Beziehungen zwischen Vektoren handelt, ist die Vektoranalysis die einzige indigene Methode, alle anderen Methoden sind als künstliche, unnatürliche zu bezeichnen.

Durch Anwendung der Vektoranalysis hat man den Vorteil, viel Platz zu sparen, übersichtlichere Formeln zu bekommen, die eigentlichen physikalischen Tatsachen viel deutlicher her-

vortreten zu lassen, und das, was von einem willkürlich gewählten Koordinatensystem unabhängig ist, auch direkt als invariant bezüglich einer Koordinatentransformation erscheinen zu lassen.

Liegen die Formeln in Vektorschreibweise vor, so ist es ein leichtes, in irgendein Koordinatensystem (kartesische, Polarkoordinaten usw.) überzugehen, was in der mathematischen Physik häufig bei speziellen Problemen nötig ist; das kartesische Koordinatensystem nimmt dann, wie auch in Wirklichkeit, keine Ausnahmestellung ein.

Doch wird dies Urteil über den Nutzen der Vektoranalysis nicht allgemein geteilt: Herr C. Neumann[1]) sagt im Hinblick auf dieselbe folgendes bei Erwähnung einer Arbeit von W. Wien:

> „Wien hat in seiner Arbeit — nach dem Vorgange von Hertz und Boltzmann — die Quaternionenstenographie[2]) vermieden, und der ausführlichen Sprache der Mathematiker sich bedient. Es wäre dringend zu wünschen, daß dieses Verfahren von Hertz, Boltzmann und Wien zur allgemeinen Regel würde. Denn gerade bei wichtigen und schwierigen Untersuchungen dürfte man doch wohl gut tun, weniger der Kürze als vielmehr der Strenge und Klarheit sich zu befleißigen."

Es ist ja richtig, daß man beim Erlernen der Stenographie zuerst langsamer stenographisch schreibt, als in Kurrentschrift, aber solche Übergangszeiten sind schnell überwunden, und der Zeitverlust wird tausendfach wieder eingeholt, anderseits ist die Vektoranalysis mehr als eine Kurzschrift, wie ich bereits auseinandergesetzt habe, sie ist, wenn es sich um Vektoren handelt, die einzige natürliche Rechenmethode. Daß sie weniger streng wäre als die älteren Methoden, ist unrichtig, daß sie unklarer wäre, wird durch die Arbeiten von H. A. Lorentz, E. Cohn, M. Abraham u. a. am besten widerlegt. Man schreibe nur die dort vorkommenden

1) C. Neumann, Über die sogenannte absolute Bewegung. Boltzmann-Festschrift — Leipzig 1904. S. 252.

2) Damit ist die Vektoranalysis gemeint. D. Verf.

Gleichungen in kartesischen Koordinaten, und man wird überzeugt sein.

Man sehe sich nur die unübersichtliche, umständliche Schreibweise bei Hertz, Boltzmann, Helmholtz, Neumann an, so wird man sich wundern, daß die Vektoranalysis nicht schon viel eher festen Fuß gefaßt hat; zu verstehen ist diese Tatsache nur durch den Widerstand, der von mathematischer Seite gegen dieselbe geleistet wurde, zum Teil mit Recht, da viele, welche die Vektorschreibweise gebrauchten, eben nur die neuen, ungewohnten Symbole einführten, mit denen sie nicht rechneten, und die sie in Koordinaten im Geiste sich vorstellten. Solange man sich nicht die Vektoroperationen ihrem Wesen nach vorstellt, solange man nicht mit Vektoren rechnet, ist die Bezeichnungsweise keinen Pfennig wert.

Der Zweck dieses Buches soll es sein, gerade diese Möglichkeit dem Leser auf einfache, mühelose Art zu verschaffen.

Was in diesem Buche steht, ist naturgemäß nicht alles neu, der literaturkundige Leser wird die Anlehnungen von selbst erkennen. Hauptsächlich kamen mir H. Webers „Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik“ und E. Cohns „Elektromagnetisches Feld“ außer den oben zitierten Werken über Vektoranalysis zustatten. Abraham und Föppls „Theorie der Elektrizität I“ Leipzig 1904 enthält auch eine Einführung in die Vektoranalysis, doch erschien dieses Werk erst, als das vorliegende Buch bereits in der Druckerei war, so daß ich es nicht mehr benutzen konnte.

Was die Bezeichnungsweise in den vektoranalytischen Ausdrücken und in den Formeln der Elektrodynamik anbetrifft, so schließe ich mich den Festsetzungen an, die von A. Sommerfeld[1]) nach mehrfacher Rücksprache mit H. A. Lorentz, sowie unter Mitwirkung von E. Cohn und W. Wien vorgeschlagen sind.

Ich habe nicht danach gestrebt, möglichst vollständig die Methoden der Vektoranalysis zu geben, sondern ich habe im Gegenteil mich darauf beschränkt, gerade das Nötigste zum Gebrauch in der mathematischen Physik auszuwählen, damit der Leser nicht durch den zu umfangreichen Stoff vom Studium abgeschreckt wird.

---

1) A. Sommerfeld, Physikal. Ztschr. 5. p. 467—470. 1904.

Die Anwendungen sollen dem Leser zeigen, daß die entwickelten Beziehungen nicht mathematische Spekulationen ohne praktischen Wert, sondern ein brauchbares Handwerkszeug sind; ich habe geglaubt, hier nicht zu sparsam sein zu sollen.

Die Formeltabelle am Schlusse des Buches wird beim Lesen gute Dienste tun, sie wird auch bei selbständiger Anwendung der Vektoranalysis von Nutzen sein.

Sollte das Buch dazu beitragen, die Vektoranalysis zum Allgemeingut der Physiker zu machen, so wäre meine Arbeit dadurch hinreichend belohnt.

Tübingen 1904.

Richard Gans.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel I.

Die elementaren Operationen der Vektoranalysis.

Seite

§ 1. Skalare und Vektoren. Das skalare und das vektorielle Feld. Die geometrische Darstellung eines Feldes 1
§ 2. Die Komponentendarstellung eines Vektors 4
§ 3. Die Addition von Vektoren 6
§ 4. Das skalare Produkt 9
§ 5. Das Vektorprodukt. Das Drehmoment einer Kraft. Die Krümmung einer Raumkurve. Das erste Keplersche Gesetz. . . . 11
§ 6. Einige Beziehungen zwischen skalaren und vektoriellen Produkten 17
§ 7. Die Bewegung eines elektrisch geladenen Massenpunktes in einem konstanten Magnetfelde 19

Kapitel II.

Die Differentialoperationen und Integralsätze der Vektoranalysis.

§ 1. Der Gradient 23
§ 2. Der Gaußsche Integralsatz und die Divergenz 29
§ 3. Der Stokessche Integralsatz und die Rotation 35
§ 4. Beziehungen zwischen den Differentialoperationen 39
§ 5. Der Greensche Satz 43
§ 6. Unstetigkeiten 46
§ 7. Differentialquotienten nach der Zeit 48

Kapitel III.

Krummlinige Koordinaten. Vektorzerlegungen. Mechanische Deformationen.

§ 1. Das Linienelement in krummlinigen Koordinaten 51
§ 2. Die Vektoroperationen in krummlinigen Koordinaten 53
§ 3. Die Potentialgleichung und die Wellengleichung 55
§ 4. Zerlegung eines Vektors in einen Potentialvektor und einen solenoidalen Vektor. Skalares und Vektorpotential . . . 59
§ 5. Mechanische Deformationen 62

Kapitel IV.

Anwendungen aus der Hydrodynamik und aus der Elektrodynamik.

Seite

§ 1. Die Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik 66
§ 2. Die Helmholtzschen Wirbelsätze 68
§ 3. Elektrolytische Verschiebungen 70
§ 4. Die Maxwellschen Gleichungen 72
§ 5. Drei Integrale der Maxwellschen Gleichungen 77
§ 6. Die partiellen Differentialgleichungen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ 81
§ 7. Die Hertzschen Gleichungen für bewegte Medien 82
§ 8. Die ponderomotorischen Kräfte der Maxwell-Hertzschen Theorie 83
§ 9. Induktion in einer rotierenden Kugel 86
§ 10. Die Lorentzsche Elektronentheorie 90
§ 11. Umformung der Lorentzschen Gleichungen 91
§ 12. Die retardierten Potentiale 94

Kapitel I.

Die elementaren Operationen der Vektoranalysis.

§ 1.

Skalare und Vektoren. Das skalare und das vektorielle Feld. Die geometrische Darstellung eines Feldes.

Man unterscheidet in der Physik zwei Größenarten, die wesentlich voneinander verschieden sind: Skalare und Vektoren.

Skalare heißen die Größen, welche bei gegebenen Maßeinheiten durch eine einzige Zahl vollständig bestimmbar sind, Vektoren bedürfen zu ihrer vollständigen Bestimmung außer der Angabe ihrer Größe noch der Angabe ihrer Richtung im Raum, und da eine Richtung in einem Punkte durch zwei Zahlenangaben festgelegt werden kann (z. B. geographische Länge und Breite auf einer Kugelfläche um den fraglichen Punkt), so ist ein Vektor durch drei Zahlenangaben bestimmt, während ein Skalar durch eine Zahlenangabe bestimmt ist.

So sind z. B. Temperatur, spezifisches Gewicht, Leitfähigkeit Skalare, während Verschiebung, Geschwindigkeit, Kraft, elektrische Feldstärke Vektoren sind.

Schreibt man jedem Punkte eines endlichen Raumgebietes oder des unendlichen Raumes einen bestimmten Wert einer physikalischen Eigenschaft zu, so daß diese Eigenschaft zur Ortsfunktion im behandelten Raumgebiete wird, so nennt man den als Träger dieser physikalischen Eigenschaft betrachteten Raum ein Feld. So spricht man von Temperaturfeldern, elektrischen Feldern, Kraftfeldern usw. Je nachdem die im Felde dargestellte Größe eine skalare oder vektorielle ist, heißt das Feld ein skalares oder vektorielles Feld.

Für die Anschaulichkeit ist es von großer Wichtigkeit, Methoden zu finden, ein Feld geometrisch darzustellen, so daß man aus der Darstellung selbst die wesentlichen Eigenschaften des Feldes ersehen kann.

Es sei z. B. ein skalares Feld gegeben. Irgendeine physikalische Eigenschaft U sei eine stetige Funktion des Raumes. Die Stetigkeit sei höchstens in einzelnen Punkten, Linien oder Flächen verletzt.

Man gehe von einem Punkte p_0 des Raumes aus, in dem die Funktion U den Wert U_0 habe und betrachte alle Punkte des Raumes, in denen U auch den Wert U_0 hat. Diese Punkte werden auf einer Fläche, einer sogenannten Niveaufläche, liegen, die entweder geschlossen ist oder bis an die Grenzen des Feldes sich erstreckt; es kann auch der Fall vorkommen, daß mehrere voneinander getrennte Flächen die Punkte repräsentieren, in denen $U = U_0$ ist.

Konstruiert man mehrere Niveauflächen $U = \text{const}$ für verschiedene Werte der Konstanten, so bekommt man bereits ein

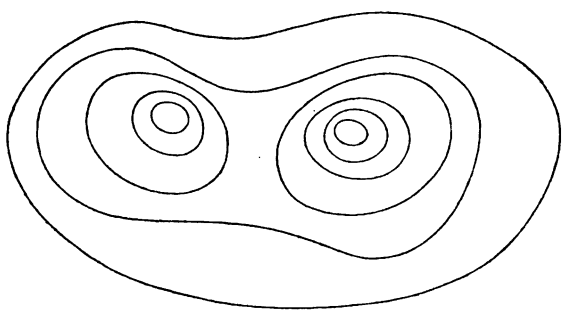


Fig. 1.

ziemlich anschauliches Bild des Feldes. Um die Beschreibung vollständig zu machen, wollen wir gerade die Flächen konstruieren, welche äquidistanten Werten der Konstanten entsprechen. Fig. 1 gibt ein Beispiel einer solchen Felddarstellung. Je dichter benachbarte Flächen einander kommen, um so schneller ändert sich dort die durch den Skalar U dargestellte Eigenschaft; am schnellsten ändert sich die Eigenschaft U beim

Fortschreiten zwischen zwei Niveauflächen, wenn man sich immer senkrecht zu den Niveauflächen bewegt. Schreitet man in einer Fläche fort, so ändert sich auf diesem Wege U nicht (nach der Definition der Niveaufläche).

Zwei Niveauflächen, die verschiedenen Werten von U entsprechen, können sich nicht schneiden, denn sonst müßten wir auf der Schnittkurve beide Werte U annehmen, was unmöglich ist, da wir es nur mit eindeutigen Eigenschaften zu tun haben; die Flächen umgeben sich also schalenförmig.

Während wir Skalare mit lateinischen Buchstaben bezeichnen, wählen wir für Vektoren deutsche Buchstaben. Den absoluten Wert eines Vektors $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir, wie es in der Funktionentheorie üblich ist, durch $|\mathfrak{A}|$. Einzelne Vektoren (im Gegensatz zu einem Vektorfeld) stellt man geometrisch durch eine Strecke dar, deren Richtung mit der des Vektors zusammenfällt und deren Länge der Größe des Vektors proportional ist. Der Proportionalitätsfaktor ist willkürlich, aber muß ein für allemal festgelegt werden.

Um ein Vektorfeld darzustellen, schlagen wir folgendes Verfahren ein: Wir gehen von einem Punkte p_0 aus und ziehen durch denselben ein unendlich kleines Stück einer geraden Linie in Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ bis zu einem unendlich benachbarten Punkte p_1, in dem wir abermals in Richtung des dort vorhandenen Vektors ein unendlich kleines Stück einer Geraden konstruieren. So erhalten wir eine im allgemeinen doppelt gekrümmte Kurve, deren Richtung überall die Richtung des Vektors hat. Um sich auch ein Bild von der Größe des Vektors in jedem Punkte zu verschaffen, lege man in einem Punkte p der soeben konstruierten Kurve senkrecht zu derselben ein unendlich kleines Flächenelement $d\sigma$ und wähle auf jeder Flächeneinheit so viele Punkte, wie die Größe des Vektors angibt. Durch jeden solchen Punkt konstruiere man in der-

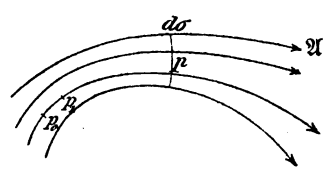


Fig. 2.

selben Weise wie oben eine $\mathfrak{A}$-Linie, die in ihrem Verlaufe der Vektorrichtung folgt. So bekommt man ein System von $\mathfrak{A}$-Linien, welches durch Richtung und Dichte ein Bild von der Richtung und Größe des Vektors gibt, indem die Richtung der $\mathfrak{A}$-Linien die Richtung des Vektors anzeigt, und die Anzahl $\mathfrak{A}$-Linien, die auf einer senkrecht zu denselben gelegten (unendlich klein gedachten) Flächeneinheit stehen, die Größe des Vektors ergibt.

Es kann nicht vorkommen, daß zwei verschiedene Kurven sich schneiden, da im Schnittpunkte die Richtung nicht mehr eindeutig wäre.

Wir übersehen sofort, daß die Möglichkeit eines Entspringens oder Mündens von Vektorlinien $\mathfrak{A}$ nicht von der Hand gewiesen werden darf.

Denn denken wir uns (Fig. 3) auf dem Rande und im Innern einer unendlich kleinen Fläche $d\sigma_1$ die $\mathfrak{A}$-Linien in der der obigen Konstruktionsvorschrift entsprechenden Zahl konstruiert (d. h. $|\mathfrak{A}_1|\,d\sigma_1$ Linien im ganzen, wenn $|\mathfrak{A}_1|$ die Größe des Vektors $\mathfrak{A}$ an der Stelle von $d\sigma_1$ ist). An irgendeiner anderen Stelle legen wir senkrecht zu den Linien, die vom Rande ausgegangen sind, das Flächenelement $d\sigma_2$. Ist dort die Größe des Vektors $|\mathfrak{A}_2|$, so müssen auf dieser Fläche $|\mathfrak{A}_2|\,d\sigma_2$ Linien senkrecht stehen; ist also $|\mathfrak{A}_2|\,d\sigma_2 \gtrless |\mathfrak{A}_1|\,d\sigma_1$, so müssen auf dem Wege von $d\sigma_1$ nach $d\sigma_2$ $\mathfrak{A}$-Linien im Innern des Bündels entsprungen resp. gemündet sein.

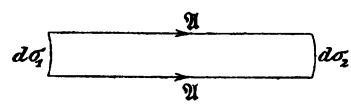


Fig. 3.

§ 2.

Die Komponentendarstellung eines Vektors.

Wir können der Vektordarstellung ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde legen und den Vektor bestimmen durch seine rechtwinkligen Projektionen auf die Koordinatenachsen. Diese Komponenten bezeichnen wir durch $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$.

Das Koordinatensystem soll dabei hier wie durchweg als Rechtssystem gewählt werden, d. h. eine Drehung der

$+ x$-Achse in der xy-Ebene auf kürzestem Wege in die Richtung der y-Achse und eine gleichzeitige Vorwärtsbewegung in Richtung der $+ z$-Achse sollen eine Rechtsschraubung darstellen, also der bekannten Bewegung des Korkziehers entsprechen, wir wollen, um solche Drehung und Vorwärtsbewegung aufeinander zu beziehen, künftig einfach von der Korkzieherregel sprechen.

Ist x, y, z ein Rechtssystem, so ist auch y, z, x und z, x, y ein Rechtssystem; d. h. zyklische Vertauschung der Richtungen ist gestattet.

Die Darstellung des Vektors durch seine drei Komponenten nach drei rechtwinkligen Achsenrichtungen hat vor der Wahl anderer Koordinatensysteme den Vorteil der Symmetrie, aber die Rechnung mit dem Vektor selbst, ohne Benutzung irgendeiner bestimmten Darstellungsweise ist die natürlichste und darum vorzuziehen.

Der absolute Wert des Vektors $\mathfrak{A}$ oder der **Betrag** von $\mathfrak{A}$ drückt sich durch die Komponenten folgendermaßen aus:

$$|\mathfrak{A}| = \sqrt{\mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2}. \tag{1}$$

Schon bei diesem einfachen Ausdrucke sieht man der rechten Seite nicht an, daß sie vom Koordinatensystem unabhängig ist, während die linke Seite, welche der Vektorschreibweise entspricht, dies sofort dokumentiert.

Die Winkel, welche $\mathfrak{A}$ mit den Koordinatenachsen bildet, ergeben sich aus den Gleichungen

$$\cos(\mathfrak{A}, x) = \frac{\mathfrak{A}_x}{|\mathfrak{A}|}, \quad \cos(\mathfrak{A}, y) = \frac{\mathfrak{A}_y}{|\mathfrak{A}|}, \quad \cos(\mathfrak{A}, z) = \frac{\mathfrak{A}_z}{|\mathfrak{A}|}. \tag{2}$$

Die Komponenten sind als positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem der Vektor (vom Anfang zum Ende gerechnet) mit der betreffenden Koordinatenachse einen spitzen oder stumpfen Winkel einschließt.

Aus (1) und (2) folgt

$$|\mathfrak{A}| = \mathfrak{A}_x \cos(\mathfrak{A}, x) + \mathfrak{A}_y \cos(\mathfrak{A}, y) + \mathfrak{A}_z \cos(\mathfrak{A}, z). \tag{3}$$

(1), (2), (3) ergeben die charakteristischen Beziehungen zwischen einem Vektor und seinen Komponenten.

§ 3.

Die Addition von Vektoren.

Unter der Summe $\mathfrak{C}$ zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \tag{1}$$

wollen wir die geometrische Summe verstehen, d. h. man denke sich den Vektor $\mathfrak{B}$ parallel mit sich selbst verschoben, bis sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\mathfrak{A}$ zusammenfällt; die Verbindungslinie des Anfangs von $\mathfrak{A}$ mit dem Ende von $\mathfrak{B}$ repräsentiert nach Größe und Richtung die Summe $\mathfrak{C}$ (Fig. 4).

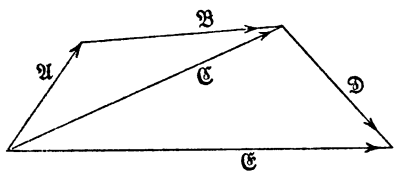


Fig. 4.

Es gilt für Vektorenaddition das kommutative Gesetz

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \tag{2}$$

wie sich sofort aus der obigen Additionsdefinition ergibt. Wollen wir zu $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ noch den Vektor $\mathfrak{D}$ addieren, so ist dieselbe Konstruktion anzuwenden (Fig. 4), es ergibt sich

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{D}. \tag{3}$$

Auch hier darf man die Reihenfolge der Additionen beliebig vertauschen, es gilt auch das assoziative Gesetz

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{D} = \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{D}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{D}. \tag{4}$$

Die Summe beliebig vieler Vektoren erhält man also durch Parallelverschiebung derselben, so daß alle einen zusammenhängenden Linienzug bilden. Die Verbindungslinie des Anfangspunktes des ersten Vektors mit dem Endpunkt des letzten stellt die Summe der betrachteten Vektoren dar.

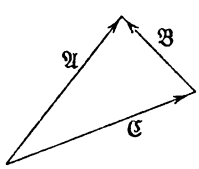


Fig. 5.

Unter der Differenz $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}$ zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verstehen wir denjenigen Vektor $\mathfrak{C}$, der die Eigenschaft hat, daß (Fig. 5)

$$\mathfrak{C} + \mathfrak{B} = \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Es sei $\mathfrak{C}$ gefunden, so konstruieren wir $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ in der soeben angegebenen Weise (Fig. 5). Aus der Figur ersehen wir, daß $\mathfrak{C}$ sich aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ergibt, indem man die Richtung von $\mathfrak{B}$ umkehrt und den so aus $\mathfrak{B}$ erhaltenen Vektor zu $\mathfrak{A}$ addiert. Wir nennen den durch Richtungsumkehrung aus $\mathfrak{B}$ erhaltenen Vektor $-\mathfrak{B}$, dann können wir sagen:

Die Differenz $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$ ergibt sich durch geometrische Addition von $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B}$.

So ist die Subtraktion auf die Addition zurückgeführt, und wir können ganz allgemein Vektoren addieren (resp. subtrahieren), indem wir einen Linienzug durch Parallelverschiebung konstruieren, bei dem sich der Anfang (resp. das Ende) jedes folgenden Vektors an den zuletzt erhaltenen Punkt des Linienzugs anreiht.

Dieser Linienzug wird im allgemeinen nicht eben sein. Ist der Linienzug geschlossen, so ist die Summe der Vektoren 0.

In Fig. 6a sind die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ gegeben. Fig. 6b stellt die Summe $\mathfrak{E}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}+\mathfrak{D}$ dar.

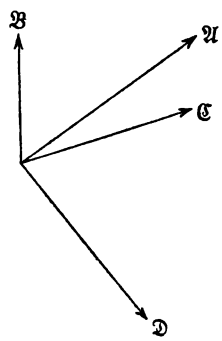


Fig. 6a.

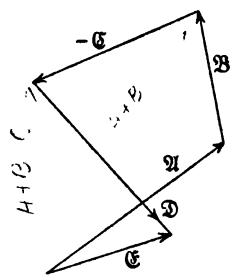


Fig. 6b.

Da bei einer Parallelverschiebung sich die Komponenten eines Vektors nach einem rechtwinkligen Koordinatensystem nicht verändern, so ergeben sich die Komponenten der Summe mehrerer Vektoren als Summe der entsprechenden Komponenten der Summanden, also hat $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}+\mathfrak{D}$ die Komponenten $\mathfrak{A}_x+\mathfrak{B}_x-\mathfrak{C}_x+\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{A}_y+\mathfrak{B}_y-\mathfrak{C}_y+\mathfrak{D}_y$, $\mathfrak{A}_z+\mathfrak{B}_z-\mathfrak{C}_z+\mathfrak{D}_z$.

Addieren wir einen Vektor $\mathfrak{A}$ zu sich selbst, so nennen wir das Resultat $2\mathfrak{A}$, dies ist ein Vektor von der Richtung von $\mathfrak{A}$ und von doppelter Größe, wie sich aus der Additionsdefinition ergibt.

Das läßt sich verallgemeinern, und es folgt:

Ist m ein Skalar, $\mathfrak{A}$ ein Vektor, so ist $m\mathfrak{A}$ ein Vektor von derselben resp. entgegengesetzten Richtung wie $\mathfrak{A}$, je nachdem $m \gtrless 0$, und $m$facher Größe.

Ist $\mathfrak{A}$ ein Vektor, der in einem Raum S als Funktion des Ortes gegeben ist, und bedeutet dS ein Volumelement des Raumes, d. h. einen Skalar, so ist also $\mathfrak{A}dS$ ein Vektor von der Richtung des Vektors $\mathfrak{A}$ und einem Betrag, der dSmal so groß ist wie $\mathfrak{A}$. Summieren wir über den ganzen Raum S, so entsteht $\int_S \mathfrak{A}dS$. Das Integral bedeutet eine Vektoraddition der unendlich kleinen Vektoren $\mathfrak{A}dS$ und stellt demnach selbst einen Vektor dar.

Ist z. B. $\mathfrak{A}$ die Kraft auf die Volumeinheit, so ist $\int_S \mathfrak{A}dS$ die Gesamtkraft auf den Körper vom Volumen S.

Die Vektoraddition wendet man in der Mechanik auf die Zusammensetzung von Kräften an. Die Resultante entspricht der Summe (Parallelogramm der Kräfte).

Satz: Drei Vektoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ liegen in einer Ebene, wenn sich drei Zahlen a, b, c so bestimmen lassen, daß

$$a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} = 0; \tag{6}$$

denn dann ist

$$\mathfrak{C} = -\frac{a}{c}\mathfrak{A} - \frac{b}{c}\mathfrak{B}. \tag{7}$$

Nun sind aber $-\frac{a}{c}\mathfrak{A}$ und $-\frac{b}{c}\mathfrak{B}$ Vektoren, die dieselbe oder entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{A}$ resp. $\mathfrak{B}$ haben, ihre Summe $\mathfrak{C}$ liegt nach der Additionskonstruktion in der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmten Ebene.

§ 4.

Das skalare Produkt.

Unter dem skalaren Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verstehen wir einen Skalar von der Größe des Produkts der absoluten Werte, multipliziert mit dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels. Also $|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Wir schreiben dasselbe einfach $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, so daß wir haben

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}). \tag{1}$$

Aus dieser Definition, in der von keinem Koordinatensystem die Rede ist, sondern nur von der Größe zweier Vektoren und ihrer gegenseitigen Lage, erhellt sofort, daß das skalare Produkt zweier Vektoren vom Koordinatensystem unabhängig ist.

Es ist laut Definition

(a)[1] $$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{A}), \tag{2}$$

d. h. es gilt das kommutative Gesetz.

Das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist Null

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0, \tag{3}$$

wenn entweder $\mathfrak{A} = 0$ oder $\mathfrak{B} = 0$ oder $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{B}$.

Das skalare Produkt eines Vektors $\mathfrak{A}$ mit sich selbst hat laut Definition den Wert

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = |\mathfrak{A}|^2. \tag{4}$$

Wir werden einfacher $\mathfrak{A}^2$ schreiben, da hier keine Verwechselung möglich ist; auch werden wir die Klammern um das skalare Produkt fortlassen, wenn sie unnötig erscheinen.

Wir wollen das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch die rechtwinkligen Komponenten der Vektoren ausdrücken.

Zu diesem Zwecke denken wir uns $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ parallel mit sich selbst in den Koordinatenursprung O verlegt, so geben die

---

1) Die eingeklammerten Buchstaben vor den Formeln beziehen sich auf die Formeltabelle am Ende des Buches.

Komponenten nach den Achsen die entsprechenden Koordinaten der Endpunkte der Vektoren an.

Nach dem Kosinus-Satz ist (Fig. 7)

$$\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - 2\,|\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}|\cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{C}^2 \tag{5}$$

oder

$$2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{C}^2. \tag{5'}$$

Nun ist aber, wie aus Fig. 7 ersichtlich,

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}; \tag{6}$$

also ist

$$2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 - (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})^2. \tag{7}$$

Nach § 2 (1) folgt also

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z. \tag{8}$$

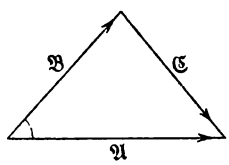


Fig. 7.

Dies ist die Darstellung des skalaren Produkts durch die Komponenten. Die linke Seite ergibt infolge ihrer Bedeutung die Unabhängigkeit vom Koordinatensystem, während dies für die rechte Seite erst erwiesen werden müßte.

Aus (8) folgt sofort

(b)
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{C}). \tag{9}$$

Ebenfalls ist

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C} + \mathfrak{D}) = (\mathfrak{A}, \mathfrak{C}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) + (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) + (\mathfrak{B}, \mathfrak{D}), \tag{10}$$

d. h. **das distributive Gesetz gilt bei der skalaren Multiplikation.**

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Funktionen eines Parameters t, z. B. der Zeit, so ist

(i)
$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = \left(\mathfrak{A}, \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dt}, \mathfrak{B}\right). \tag{11}$$

Hier ist $\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$ definiert als der Vektor $\lim\limits_{h=0} \frac{\mathfrak{A}(t+h) - \mathfrak{A}(t)}{h}$.

Der Beweis von (11) ergibt sich z. B. aus der Komponentendarstellung, ist aber auch unabhängig davon aus obiger Definition des Differentialquotienten zu führen.

Bezeichnet $\delta\mathfrak{s}$ die Verschiebung, welche ein Massenpunkt erleidet, an dem die Kraft $\mathfrak{f}$ angreift, so ist

$$A = (\mathfrak{f}, \delta\mathfrak{s})$$

die geleistete Arbeit.

Bemerkung: Manche Schriftsteller schreiben anstatt $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ $S\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, andere benutzen $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$, es ist auch $\mathfrak{A}\circ\mathfrak{B}$ vorgeschlagen.

§ 5.

Das Vektorprodukt.

Unter dem Vektorprodukt $\mathfrak{C}$ zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verstehen wir einen Vektor, dessen Größe gleich dem Parallelogramm aus den beiden Vektoren ist; die Richtung von $\mathfrak{C}$ ist senkrecht zur Ebene des Parallelogramms und zwar so, daß eine Drehung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ auf kürzestem Wege und eine Vorwärtsbewegung in Richtung von $\mathfrak{C}$ eine Rechtsschraubung ergibt; auch hier ist also die Korkzieherregel anzuwenden; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bilden ein Rechtssystem.

Wir bezeichnen das Vektorprodukt durch eckige Klammern, also

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]. \tag{1}$$

Der Betrag von $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ ist der Parallelogrammінhalt, also

$$|[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}). \tag{2}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich sofort

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = 0, \tag{3}$$

da hier der eingeschlossene Winkel Null ist. Umgekehrt folgt aus

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0,$$

daß entweder $\mathfrak{A} = 0$ oder $\mathfrak{B} = 0$ oder $\mathfrak{A} \parallel \mathfrak{B}$ ist.

Aus der Definition ergibt sich

(c)
$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = -[\mathfrak{B}, \mathfrak{A}]. \tag{4}$$

Denn bei der Vertauschung von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ergibt die Korkzieherregel die entgegengesetzte Richtung. (Eine Drehung von $\mathfrak{B}$ nach $\mathfrak{A}$ und eine Vorwärtsbewegung entsprechend der Rechtsschraubung ergibt eine gerade entgegengesetzte Richtung

wie eine Drehung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ und Vorwärtsbewegung im Sinne der Rechtsschraubung.)

Aus (4) würde sich auch (3) ergeben, denn setzen wir in (4) $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, so ist

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = -[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] = 0. \tag{3'}$$

(e)

Das kommutative Gesetz gilt also für die vektorielle Multiplikation nicht.

Wir wollen die Komponenten von $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ in einem rechtwinkligen Achsenkreuz berechnen; wir bezeichnen dieselben durch $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_x$, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_y$, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_z$.

Zu diesem Zwecke denken wir uns die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ parallel mit sich selbst in den Anfangspunkt des Koordinatensystems verschoben. Der doppelte Inhalt des aus den Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildeten Dreiecks ist dann $|\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}| \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Nennen wir die Fläche des Parallelogramms $\mathfrak{f}$, die ihrer Projektionen auf die yz, zx, xy Ebene resp. $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$, so ergibt der verallgemeinerte Pythagoras:

$$\mathfrak{f}^2 = \mathfrak{f}_x^2 + \mathfrak{f}_y^2 + \mathfrak{f}_z^2. \tag{5}$$

Ferner ist

$$\mathfrak{f}_x = \mathfrak{f} \cos(n, x); \quad \mathfrak{f}_y = \mathfrak{f} \cos(n, y); \quad \mathfrak{f}_z = \mathfrak{f} \cos(n, z), \tag{6}$$

wo n die positive Normale (im Sinne der Korkzieherregel) auf dem Parallelogramm aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bedeutet.

Aus (5) und (6) folgt

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_x \cos(n, x) + \mathfrak{f}_y \cos(n, y) + \mathfrak{f}_z \cos(n, z), \tag{7}$$

d. h. fassen wir $\mathfrak{f}$ als Vektor auf in Richtung von n, so sind $\mathfrak{f}_x$, $\mathfrak{f}_y$, $\mathfrak{f}_z$ seine Komponenten. Die Projektion des Parallelogramms $|[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]|$ auf die yz Ebene ist der Größe nach die x Komponente von $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$. Fig. 8 (s. S. 13) stelle die Projektion des aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gebildeten Dreiecks auf die yz Ebene dar. P hat die Koordinaten $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, Q hat die Koordinaten $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$.

Nun ist

$$2\Delta OPQ = 2\Delta OqQ + 2 \text{ Trapez } qpPQ - 2\Delta OpP,$$

also gleich

$$\mathfrak{B}_y\mathfrak{B}_z + (\mathfrak{A}_z + \mathfrak{B}_z)(\mathfrak{A}_y - \mathfrak{B}_y) - \mathfrak{A}_y\mathfrak{A}_z.$$

Die Ausrechnung ergibt

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_x = \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_y;$$

ebenso ist

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_y = \mathfrak{A}_z \mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_z, \qquad (8)$$

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]_z = \mathfrak{A}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y \mathfrak{B}_x.$$

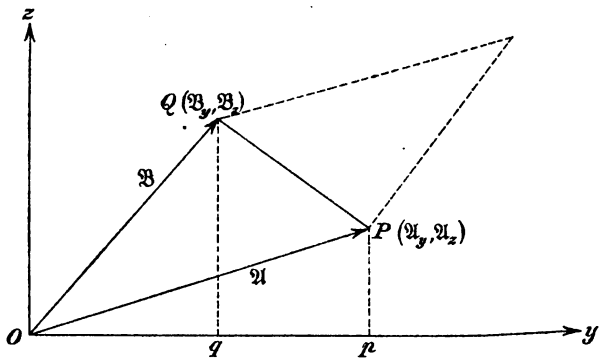


Fig. 8.

Aus diesen Werten für die Komponenten folgt das distributive Gesetz

(d) $$[\mathfrak{A}, \mathfrak{B} + \mathfrak{C}] = [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}, \mathfrak{C}], \qquad (9)$$

$$[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, \mathfrak{C} + \mathfrak{D}] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{D}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{D}]. \qquad (10)$$

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Funktionen eines Parameters t, z. B. der Zeit, so ist

(k) $$\frac{d}{dt}[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt}, \mathfrak{B}\right] + \left[\mathfrak{A}, \frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right]. \qquad (11)$$

Hier ist das Innehalten der ursprünglichen Reihenfolge der Vektoren zu beachten.

Der Beweis ergibt sich aus der Komponentendarstellung (8), ist aber auch unabhängig davon aus der Definition des Differentialquotienten zu führen (cf. § 4 (11)).

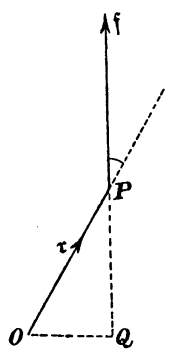


Fig. 9.

Das Drehmoment einer Kraft. Ein Körper sei um den Punkt O drehbar (Fig. 9). Im Punkte P greife eine Kraft $\mathfrak{f}$ an, dann ist das Drehmoment $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{f}$ um O durch folgende Bestimmungen ge-

geben. Die Drehachse steht senkrecht auf der aus $\mathfrak{r} = OP$ und $\mathfrak{f}$ gebildeten Ebene; seine Größe ist gegeben durch das Produkt aus $|\mathfrak{f}|$ mit dem Abstand OQ des Punktes O von $\mathfrak{f}$. Wir können den Abstand $\mathfrak{r}$ des Kraftangriffpunktes P vom Drehpunkt O als Vektor auffassen, dessen Richtung und Größe durch OP gegeben ist. Nun ist aber

$$OQ = |\mathfrak{r}| \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}),$$

also ist

$$|\mathfrak{N}| = |\mathfrak{r}| \cdot |\mathfrak{f}| \sin(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}).$$

Wir können also das Drehmoment als Vektor auffassen, dessen Betrag die Größe des Drehmoments und dessen Richtung die Richtung der Drehachse ist, also ist

$$\mathfrak{N} = [\mathfrak{r}, \mathfrak{f}]. \tag{12}$$

Wir haben also die positive Richtung von $\mathfrak{N}$ so gewählt, daß die durch $\mathfrak{N}$ bewirkte Drehung um die Drehachse durch O und ein Vorwärtsgehen in Richtung von $\mathfrak{N}$ eine Rechtsschraubung ist.

Nehmen wir O zum Anfangspunkt eines Koordinatensystems, und bezeichnen wir die Koordinaten von P mit x, y, z, so drücken sich die Komponenten von $\mathfrak{N}$ in der bekannten Weise aus (nach (8))

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_x &= y\mathfrak{f}_z - z\mathfrak{f}_y, \\ \mathfrak{N}_y &= z\mathfrak{f}_x - x\mathfrak{f}_z, \\ \mathfrak{N}_z &= x\mathfrak{f}_y - y\mathfrak{f}_x. \end{aligned} \tag{13}$$

Die Krümmung einer Raumkurve. Wir definieren die Krümmung einer Raumkurve als Vektor, dessen Betrag die Größe der ersten Krümmung ist, und dessen Richtung senkrecht zur Schmiegungsebene steht, und zwar in dem Sinne, daß ein Vorwärtsschreiten auf der gekrümmten Kurve (also eine Drehung) und ein Vorwärtsschreiten in Richtung des Vektors der Korkzieherregel entspricht.

Da wir immer die physikalischen Anwendungen im Auge haben, so wollen wir uns einen Massenpunkt vorstellen, der mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ die Kurve durchläuft. $\mathfrak{v}$ sei Funktion

der von einem festen Kurvenpunkte gemessenen Kurvenlänge s, die Richtung von $\mathfrak{v}$ fällt mit der jeweiligen Richtung der Tangente zusammen. Durch $\mathfrak{v}$ wollen wir die Krümmung ausdrücken.

Gehen wir um ds auf der Kurve weiter, so hat $\mathfrak{v}$ Größe und Richtung geändert, und stellt sich durch den Vektor $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ dar. Das Parallelogramm der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v} + d\mathfrak{v}$ drückt sich aus durch (cf. Fig. 10)

$$\mathfrak{v}^2 d\varphi = |[\mathfrak{v}, \mathfrak{v} + d\mathfrak{v}]|. \tag{14}$$

Nach (d) und (e) ist dies aber

$$\mathfrak{v}^2 d\varphi = |[\mathfrak{v}, d\mathfrak{v}]| \tag{15}$$

oder

$$\mathfrak{v}^2 \frac{d\varphi}{ds} = \left|\left[\mathfrak{v}, \frac{d\mathfrak{v}}{ds}\right]\right|. \tag{15'}$$

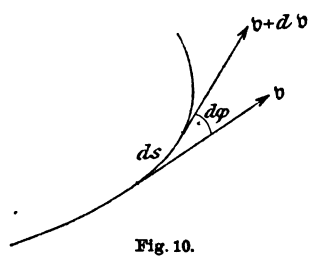


Fig. 10.

Die Krümmung $|\mathfrak{K}|$ ist also ihrem absoluten Wert nach

$$|\mathfrak{K}| = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\mathfrak{v}^2}\left|\left[\mathfrak{v}, \frac{d\mathfrak{v}}{ds}\right]\right|, \tag{16}$$

also

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\mathfrak{v}^2}\left[\mathfrak{v}, \frac{d\mathfrak{v}}{ds}\right]. \tag{17}$$

Ziehen wir von einem beliebigen festen Punkt O den Leitstrahl $\mathfrak{r}$ zum variablen Kurvenpunkt, so ist

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

daraus folgt

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\left(\frac{d\mathfrak{r}}{ds}\right)^2}\left[\frac{d\mathfrak{r}}{ds}, \frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\right]. \tag{17'}$$

(17') ist nur von geometrischen Größen abhängig; (17) ist bei dynamischen Anwendungen vorzuziehen.

Das erste Keplersche Gesetz: Wirkt auf einen Massenpunkt m eine nach einem festen Zentrum O gerichtete Kraft $\mathfrak{f}$, so ist die vom Radiusvektor (Verbindungslinie von O nach m) in der Zeiteinheit überstrichene Fläche · konstant nach Größe und Stellung.

Beweis: Die Newtonschen Bewegungsgleichungen lauten:

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f}. \tag{18}$$

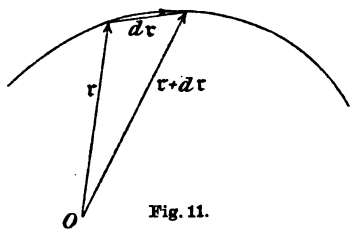


Fig. 11.

Nennen wir den Radiusvektor $\mathfrak{r}$, so drücken wir aus, daß $\mathfrak{f}$ Zentralkraft ist, also in die Richtung von $\mathfrak{r}$ fällt, durch die Gleichung

$$\mathfrak{f} = K \cdot \mathfrak{r}, \tag{19}$$

wo K eine skalare Funktion ist.

Nun ergibt sich aus Fig. 11

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}; \tag{20}$$

also ist wegen (18)

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = K \cdot \mathfrak{r}. \tag{21}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung vektoriell mit $\mathfrak{r}$, so ergibt sich mit Benutzung von (*e*) rechts

$$\left[\mathfrak{r}, \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right] = 0. \tag{22}$$

Nun ist wegen (*k*)

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \left[\mathfrak{r}, \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right] + \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right],$$

also wegen (*e*)

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \left[\mathfrak{r}, \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right]. \tag{23}$$

Wegen (22) ist also

$$\frac{d}{dt}\left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = 0, \tag{24}$$

d. h.

$$\frac{1}{2}\left[\mathfrak{r}, \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right] = \text{Konst.} \tag{25}$$

Der Radiusvektor überstreicht aber in der Zeit dt die Fläche $\frac{1}{2}[\mathfrak{r}, \mathfrak{r} + d\mathfrak{r}] = \frac{1}{2}[\mathfrak{r}, d\mathfrak{r}]$ (wegen (*e*)).

(25) sagt also aus, daß die in der Zeiteinheit überstrichene Fläche konstant ist nach Größe und Stellung.

Bemerkung: Die Bezeichnungsweise des Vektorprodukts durch eckige Klammern ist inkonsequent im Hinblick auf die anderen Bezeichnungen der Vektoranalysis, ich hatte daher anstatt $[\mathfrak{AB}]$ die Bezeichnung prod. $(\mathfrak{AB})$ (Abkürzung von Produkt) vorgeschlagen[1]), doch hat sich diese Bezeichnung nicht eingebürgert. Ich habe nun wieder die eckigen Klammern gewählt, weil ich die Übereinstimmung mit der allgemein gewählten Bezeichnungsweise für wichtiger halte als einen einzelnen Vorteil gegenüber der üblichen Bezeichnungsart.

Manche Schriftsteller schreiben anstatt $[\mathfrak{AB}]$ $V\mathfrak{AB}$, andere benutzen $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$.

§ 6.

Einige Beziehungen zwischen skalaren und vektoriellen Produkten.

1. Wir wollen die Bedeutung von $(\mathfrak{A}, [\mathfrak{BC}])$ zu ermitteln suchen:

$|[\mathfrak{BC}]|$ ist der Inhalt des Parallelogramms, welches aus den Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildet wird. Da nun

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}) = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{D}| \cos (\mathfrak{A}, \mathfrak{D})$$

aufgefaßt werden kann als Produkt aus $|\mathfrak{D}|$ und der Projektion von $\mathfrak{A}$ in die Richtung von $\mathfrak{D}$, so ist $\mathfrak{A}[\mathfrak{BC}]$ das Produkt aus dem Parallelogramm $|[\mathfrak{BC}]|$ und der Projektion von $\mathfrak{A}$ in die Richtung von $[\mathfrak{BC}]$, d. h. senkrecht zur Ebene der Vektoren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Dieses Produkt bedeutet aber das Volumen des Parallelepipeds aus den Seiten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; denn die Projektion von $\mathfrak{A}$ in Richtung der Senkrechten auf der Ebene von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ist die Höhe des Parallelepipeds.

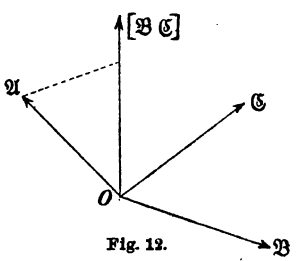


Fig. 12.

Der Inhalt ist als positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem $\mathfrak{A}$ mit $[\mathfrak{BC}]$ einen spitzen oder stumpfen Winkel

1) R. Gans, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 48. S. 1. 1902.

einschließt. Der Inhalt ist positiv, wenn $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ein Rechtssystem bilden.

Wir haben in dem Parallelepiped das aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildete Parallelogramm als Grundfläche, die Projektion von $\mathfrak{A}$ als Höhe genommen; gerade so gut können wir aber auch irgend zwei andere der Vektoren zum Grundflächenparallelogramm nehmen und den dritten zur Projektion auf die Höhenrichtung. Wir haben aber dabei darauf zu achten, daß, wenn $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$ ein Rechtssystem war, die Vektoren in der Reihenfolge gewählt werden, daß sie ein Rechtssystem sind. Wie man sich aus der Figur leicht überzeugt, ist das der Fall, wenn die Vektoren zyklisch vertauscht werden. Also ist

(f)
$$(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]) = (\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}]) = (\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]), \tag{1}$$

aber es ist

$$(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]) = -(\mathfrak{B}[\mathfrak{A}\mathfrak{C}]). \tag{2}$$

Aus (1) ergibt sich sofort

(g)
$$(\mathfrak{A}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]) = 0, \tag{3}$$

denn es ist nach (1)

$$(\mathfrak{A}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]) = (\mathfrak{B}[\mathfrak{A}\mathfrak{A}]) = 0 \tag{4}$$

nach (e).

Man sieht dies auch ohne Rechnung geometrisch ein, denn $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$ ist ein Vektor, der auf $\mathfrak{A}$ senkrecht steht, also muß das skalare Produkt aus $\mathfrak{A}$ und diesem auf $\mathfrak{A}$ senkrecht stehenden Vektor verschwinden.

Liegt $\mathfrak{A}$ in der Ebene von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, so ist

$$(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]) = 0. \tag{5}$$

Erstens sieht man das aus der Bedeutung des Ausdrucks als Parallelepiped ein, zweitens aber kann man es auch folgendermaßen zeigen.

Nach § 3 (6) besteht dann die Beziehung

$$a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} = 0$$

oder

$$\mathfrak{A} = -\frac{b}{a}\mathfrak{B} - \frac{c}{a}\mathfrak{C}$$

Setzen wir dies in $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ ein, so erhalten wir

$$\left(-\frac{b}{a}\mathfrak{B}-\frac{c}{a}\mathfrak{C}\right)[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]=-\frac{b}{a}\mathfrak{B}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]-\frac{c}{a}\mathfrak{C}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]=0$$

nach (3).

2. Wir wollen $\big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\big]$ umformen. Zu dem Zweck schreiben wir diesen Vektor in rechtwinkligen Komponenten und können jederzeit wieder zur Vektorschreibweise übergehen, da das Koordinatensystem ganz beliebig ist und wir wissen, daß das Resultat vom Koordinatensystem unabhängig ist.

Die x-Komponente des obigen Vektors ist

$$\mathfrak{A}_y[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_z-\mathfrak{A}_z[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_y$$

oder mit Hilfe von § 5 (8)

$$\mathfrak{A}_y(\mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_y-\mathfrak{B}_y\mathfrak{C}_x)-\mathfrak{A}_z(\mathfrak{B}_z\mathfrak{C}_x-\mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_z)$$
$$=\mathfrak{B}_x(\mathfrak{A}_y\mathfrak{C}_y+\mathfrak{A}_z\mathfrak{C}_z)-\mathfrak{C}_x(\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y+\mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z).$$

Addieren und subtrahieren wir $\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x\mathfrak{C}_x$, so ergibt sich

$$\mathfrak{B}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{C})-\mathfrak{C}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Dies ist aber die x-Komponente von $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C})-\mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$, wir haben also die Formel

(h) $$\big[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]\big]=\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C})-\mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}). \qquad (6)$$

§ 7.

Die Bewegung eines elektrisch geladenen Massenpunktes in einem konstanten Magnetfelde.

Nach dem Biot-Savartschen Gesetz ist die Kraft, welche auf die unendlich kleine Länge ds eines linearen Stromkreises der elektromagnetisch gemessenen Stärke i im Magnetfelde $\mathfrak{H}$ ausgeübt wird

$$[ids,\ \mathfrak{H}].$$

Nennen wir den Drahtquerschnitt q, so daß das Volumelement qds ist, so ist die Kraft auf die Volumeinheit

$$\mathfrak{f}=\left[\frac{\mathfrak{i}}{q},\ \mathfrak{H}\right].$$

$\frac{\mathfrak{i}}{q}$ bedeutet die Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit fließt, die sogenannte Strömung $\mathfrak{J}$.

Dieses Gesetz gilt auch, wenn wir es auf einen mit der Dichte ϱ (elektromagnetisch gemessen) geladenen und mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegten Körper anwenden, d. h. wenn wir den Leitungsstrom durch Konvektionsstrom ersetzen.

In der Zeiteinheit geht aber durch die Querschnittseinheit das Volumen $\mathfrak{v}$, also die Elektrizitätsmenge $\varrho\mathfrak{v}$, es ist also

$$\mathfrak{f} = [\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]$$

die auf die Volumeinheit ausgeübte Kraft; auf den ganzen Körper wirkt also die Kraft

$$\mathfrak{f} = \int [\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{H}] dS = \int \varrho[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}] dS,$$

wenn dS ein Volumelement ist. Wir wollen annehmen, daß die Dimensionen des Körpers nur klein sind, und daß er sich ohne merkliche Drehung bewegt, d. h. daß er als Massenpunkt im mechanischen Sinne aufzufassen ist.

Da sich der Körper also wie ein starrer Körper ohne Rotation bewegt, also $\mathfrak{v}$ räumlich konstant ist, da ferner $\mathfrak{H}$ konstant sein soll, können wir schreiben

$$\mathfrak{f} = [\mathfrak{v}, \mathfrak{H}] \int \varrho dS = e[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}], \tag{1}$$

wo e die Gesamtladung des Körpers bedeutet.

Ist m seine Masse, so lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen:

$$m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} = e[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]. \tag{2}$$

Wir erhalten ein Integral, wenn wir (2) mit dem Vektor $\mathfrak{v}$ skalar multiplizieren, dann ergibt sich

$$m\left(\mathfrak{v}, \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = e(\mathfrak{v}[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]). \tag{3}$$

Hieraus folgt wegen (g)

$$\mathfrak{v} \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathfrak{v}^2 = 0 \tag{4}$$

oder

$$\mathfrak{v}^2 = C_1. \tag{5}$$

C_1 ist eine Integrationskonstante. (5) ist das Integral der lebendigen Kraft.

Diese bleibt konstant; in der Tat leistet die Kraft $\mathfrak{f}$ keine Arbeit, da sie, wie aus (1) ersichtlich, immer senkrecht zur augenblicklichen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ wirkt.

Wir bekommen noch ein Integral, wenn wir (2) skalar mit $\mathfrak{H}$ multiplizieren, dann ergibt sich wegen (g)

$$\left(\mathfrak{H}\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\mathfrak{v}\mathfrak{H}) = 0, \tag{6}$$

also

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{v}) = C_2, \tag{7}$$

wo C_2 auch Integrationskonstante ist.

Nach (7) ist also $|\mathfrak{H}|\cdot|\mathfrak{v}|\cos(\mathfrak{H},\,\mathfrak{v})$ konstant. Da aber $|\mathfrak{H}|$ nach Voraussetzung, $|\mathfrak{v}|$ aber nach (5) konstant ist, so ergibt sich aus (7) Konstanz des Winkels zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{H}$.

Wir übersehen sofort den ganzen Charakter der Bewegung, wenn wir die Krümmung der Bahnkurve noch bestimmen.

Zu dem Zwecke multiplizieren wir (2) vektoriell mit $\mathfrak{v}$ und erhalten

$$m\left[\mathfrak{v},\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] = e\left[\mathfrak{v}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}]\right]. \tag{8}$$

Nach (h) ist

$$\left[\mathfrak{v},\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] = \frac{e}{m}\{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}\mathfrak{v}^2\}. \tag{9}$$

Nun ist aber

$$\left[\mathfrak{v},\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right] = \left[\mathfrak{v},\,\frac{d\mathfrak{v}}{ds}\,\frac{ds}{dt}\right] = \left[\mathfrak{v},\,\frac{d\mathfrak{v}}{ds}\right]|\mathfrak{v}|. \tag{10}$$

Die Krümmung $\mathfrak{K}$ ist aber nach § 5 (17) mit Benutzung von (10)

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|^3}\left[\mathfrak{v},\,\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right]. \tag{11}$$

Aus (9) folgt

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{|\mathfrak{v}|^3}\,\frac{e}{m}\{\mathfrak{v}(\mathfrak{v}\mathfrak{H}) - \mathfrak{H}\mathfrak{v}^2\}. \tag{12}$$

Erheben wir (12) ins Quadrat, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}^2 &= \frac{e^2}{m^2|\mathfrak{v}|^6}\{\mathfrak{v}^2\cdot(\mathfrak{v}\mathfrak{H})^2 + \mathfrak{H}^2\cdot\mathfrak{v}^4 - 2(\mathfrak{v}\mathfrak{H})^2\cdot\mathfrak{v}^2\}\\ &= \frac{e^2}{m^2|\mathfrak{v}|^6}\{\mathfrak{H}^2\cdot\mathfrak{v}^4 - \mathfrak{v}^2(\mathfrak{v}\mathfrak{H})^2\} = \frac{e^2}{m^2|\mathfrak{v}|^4}\mathfrak{H}^2\cdot\mathfrak{v}^2\left(1 - \cos^2(\mathfrak{v}\mathfrak{H})\right)\\ &= \frac{e^2\mathfrak{H}^2}{m^2|\mathfrak{v}|^2}\sin^2(\mathfrak{v}\mathfrak{H}).\end{aligned} \tag{13}$$

Also ist

$$|\mathfrak{K}| = \frac{e|\mathfrak{H}|}{m|\mathfrak{v}|} \sin(\mathfrak{v}, \mathfrak{H}). \tag{14}$$

Die Krümmung ist also konstant, die Geschwindigkeitskomponente in Richtung von $\mathfrak{H}$ ist auch konstant, wie aus (5) und (7) folgt, ebenfalls der Winkel der Bahn gegen die Feldrichtung. Der Punkt beschreibt also eine Schraubenlinie. Ist die anfängliche Geschwindigkeit in Richtung des Feldes Null, so bleibt sie Null, dann bewegt sich der Massenpunkt auf einem Kreise vom Radius

$$r = \frac{m|\mathfrak{v}|}{e|\mathfrak{H}|}, \tag{15}$$

wie aus (14) für $\mathfrak{v} \perp \mathfrak{H}$ folgt.

Cf. motion relative to rotating earth on a horiz. plane: complex. form takes l plane of f.

Kapitel II.

Die Differentialoperationen der Vektoranalysis.

§ 1.

Der Gradient.

Es sei ein Skalar U gegeben als stetige, differenzierbare Funktion des Raumes, z. B. die Temperatur eines Körpers; wir stellen sie, wie in Kapitel I § 1 ausführlich auseinandergesetzt ist, durch ein System von Niveauflächen geometrisch dar.

Wir können einen Vektor definieren, der in jedem Punkte des betrachteten Raumteils die Richtung des schnellsten Anwachsens von U hat, und dessen Betrag gleich dem Anwachsen von U ist, wenn man in dieser Richtung um die (unendlich klein gedachte) Längeneinheit vorwärts geht.

Dieser Vektor ist von einem Koordinatensystem unabhängig, da zu seiner Definition überhaupt kein Koordinatensystem verwendet wurde, er hängt nur ab von der räumlichen Verteilung des Skalars U.

Wir nennen diesen Vektor $\mathfrak{G}$ den Gradienten von U und schreiben

$$\mathfrak{G} = \text{grad } U.$$

Wir wollen die Komponenten von $\mathfrak{G}$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem bestimmen.

Zunächst ergibt Fig. 1 Seite 2, daß die Richtung von $\mathfrak{G}$ senkrecht zu den Flächen $U = \text{const}$, den Niveauflächen, steht, denn da die Richtung die des stärksten Anwachsens von U sein soll, wenn man um die unendlich kleine Längeneinheit vorwärts geht, so ist dies natürlich die Richtung, in der man auf kürzestem Wege von einem Punkte einer Niveaufläche zur benachbarten kommt; dieser kürzeste Weg aber ist die Normale.

Bezeichnen wir ihre Richtung, nach wachsenden U genommen, mit n und denken uns einen festen Anfangspunkt auf n, so können wir uns U als Funktion von n gegeben vorstellen. $\mathfrak{G}$ fällt alsdann in die Richtung von n, und es ist

$$|\mathfrak{G}| = \frac{\partial U}{\partial n}. \tag{1}$$

Die Richtungskosinus der Normalen auf der Fläche $U(xyz) = \text{const}$, also der Richtung von $\mathfrak{G}$, haben, wie uns aus der analytischen Geometrie bekannt ist, die Werte

$$\begin{aligned}
\cos(n,x) &= \frac{\partial U/\partial x}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}},\\
\cos(n,y) &= \frac{\partial U/\partial y}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}},\\
\cos(n,z) &= \frac{\partial U/\partial z}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Betrachtet man anderseits die Projektionen von dn auf die Koordinatenrichtungen, so ergibt sich

$$\cos(nx) = \frac{\partial x}{\partial n}, \quad \cos(ny) = \frac{\partial y}{\partial n}, \quad \cos(nz) = \frac{\partial z}{\partial n}. \tag{3}$$

Multiplizieren wir entsprechende Glieder von (2) und (3) miteinander und addieren, so folgt

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial n}}{\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}} = 1 \tag{4}$$

oder

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}. \tag{4'}$$

Ferner erhält man die Komponenten von $\mathfrak{G}$ aus den Gleichungen

$$\mathfrak{G}_x = |\mathfrak{G}| \cos(nx) \text{ usw.}$$

oder mit Benutzung von (1), (2), (4')

$$\mathfrak{G}_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mathfrak{G}_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{5}$$

Da die Richtung der Koordinatenachsen willkürlich ist, so gilt allgemein

$$\mathfrak{G}_l = \frac{\partial U}{\partial l}, \tag{6}$$

wo l eine beliebige Richtung ist. Hierfür schreiben wir auch

$$\operatorname{grad}_l U = \frac{\partial U}{\partial l}. \tag{6'}$$

Wegen (6) wird $\frac{\partial U}{\partial l}$ auch die Richtungsderivierte von U in der Richtung l genannt.

$|\mathfrak{G}| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$ heißt nach Lamé der erste Differentialparameter von U.

Bildet l den Winkel ψ mit n, so ist die Projektion von $\mathfrak{G}$ auf l gleich $|\mathfrak{G}| \cos\psi$, wir sehen also, daß die Änderungsgeschwindigkeit von U in einem Punkte konstant ist auf einem Kreiskegel, dessen Achse die Normale von $U = \text{konst}$ ist. Ist $\psi = \pi/2$, so haben wir die Projektion Null, d. h. der Gradient hat keine Komponente tangential zu den Niveauflächen, was sich ja auch sofort aus der Definition der Niveauflächen ergibt, da beim Fortschreiten auf ihnen U sich nicht ändert.

Wichtig ist das Linienintegral von $\mathfrak{G}$ über eine Kurve s von einem gegebenen Anfangspunkte s_0 bis zu einem gegebenen Endpunkte s_1

$$\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{G}\, d\mathfrak{s}.$$

Unter $\mathfrak{G} \cdot d\mathfrak{s}$ ist wie immer das skalare Produkt aus $\mathfrak{G}$ und dem unendlich kleinen Vektor $d\mathfrak{s}$ zu verstehen. Dieses erhalten wir aber, wenn wir $\mathfrak{G}$ in die Richtung von $\mathfrak{s}$ projizieren und mit dem absoluten Wert $|d\mathfrak{s}|$ multiplizieren, also ist

$$\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{G}_s\, |d\mathfrak{s}| = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial U}{\partial s}\, ds, \tag{7}$$

wo unter ds der absolute Wert von $d\mathfrak{s}$ verstanden ist. Wir haben rechts ein vollständiges Differential, und es ergibt sich

$$\int_{s_0}^{s_1} \text{grad } U \cdot d\mathfrak{s} = \int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{G}\, d\mathfrak{s} = U_1 - U_0, \tag{8}$$

wo die Indizes 0 und 1 bedeuten, daß U in den Punkten s_0 und s_1 gebildet werden soll. Wir sehen also, daß das Resultat der Integration vom Integrationswege unabhängig ist und nur vom Anfangs- und Endpunkte abhängt.

Es ist also

$$(1)\int_{s_0}^{s_1} \text{grad } U \cdot d\mathfrak{s} = (2)\int_{s_0}^{s_1} \text{grad } U \cdot d\mathfrak{s}, \tag{9}$$

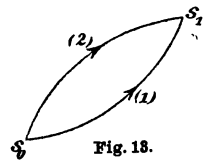


Fig. 13.

wo die Zahlen (1) und (2) am Integralzeichen die beiden in Fig. 13 gekennzeichneten Wege bedeuten sollen.

Vertauschen wir Anfangs- und Endpunkt im zweiten Integral, so kehrt sich sein Vorzeichen um, und wir haben

$$(1)\int_{s_0}^{s_1} \text{grad } U d\mathfrak{s} + (2)\int_{s_1}^{s_0} \text{grad } U d\mathfrak{s} = \int_{\mathfrak{G}} \text{grad } U \cdot d\mathfrak{s} = 0, \tag{9'}$$

wo das Zeichen $\circ$ die Integration über eine geschlossene Kurve bedeuten soll.

Ist z. B. $\mathfrak{G} = \text{grad } U$ eine Kraft, die auf einen Massenpunkt wirkt, so leistet dieselbe bei der Verschiebung von s_0 bis s_1 die Arbeit

$$A = U_1 - U_0. \tag{10}$$

U heißt in diesem Falle die Kräftefunktion der Kraft $\mathfrak{G}$. (8) sagt aus: Die Arbeit bei der Verschiebung ist gleich der Zunahme der Kräftefunktion, unabhängig vom Wege der Verschiebung.

(9') sagt aus: Die Arbeit, welche die Kräfte leisten, wenn der Punkt in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, ist Null. Es kann also keine Energie in andere Energieformen beim Verschieben übergeführt sein, das System ist im energetischen Sinne ein vollständiges oder konservatives System.

Läßt sich $\mathfrak{G}$ als Gradient eines Skalars darstellen, so heißt $\mathfrak{G}$ ein Potentialvektor.

1. Satz: Ist $\mathfrak{G}$ ein Potentialvektor, d. h. läßt sich eine Funktion U angeben, so daß $\mathfrak{G} = \text{grad } U$, so können die $\mathfrak{G}$-Linien keine geschlossenen Linien sein, sondern müssen Anfangs- und Endpunkte haben.

Denn wenn es eine geschlossene $\mathfrak{G}$-Linie gäbe, könnte man diese zur Kurve s wählen. Das Linienintegral würde dann aber nur positive Bestandteile enthalten, weil $\mathfrak{G}$ immer in die Richtung von ds fiele, und die Integration über die geschlossene Kurve s würde nicht Null ergeben, wie es (9′) verlangt.

2. Satz: Ist umgekehrt das Linienintegral von $\mathfrak{G}$ über s vom Wege unabhängig, oder, was dasselbe bedeutet, auf einem geschlossenen Wege Null, so kann man einen Skalar U angeben, so daß

$$\mathfrak{G} = \text{grad } U.$$

Physikalisch ausgesprochen lautet der Satz:

Ist die Arbeit beim Verschieben eines Massenpunktes nur von der Anfangs- und Endlage des Punktes, aber nicht vom Wege der Verschiebung abhängig, oder, was dasselbe bedeutet, wird beim Verschieben auf einem geschlossenen Wege keine Arbeit geleistet, so haben die Kräfte $\mathfrak{G}$ ein Potential U.

Beweis: Wir gehen von einem konstanten Punkte s_0 aus und bilden das Integral $\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{G}\, d\mathfrak{s}$; dieses soll nur vom Punkte s_1 abhängen bei konstant gedachtem s_0; wir setzen

$$\int_{s_0}^{s_1} \mathfrak{G}\, d\mathfrak{s} = U(s_1). \tag{11}$$

Wir wählen einen s_1 unendlich benachbarten Punkt s_1' und es sei

$$\int_{s_0}^{s_1'} \mathfrak{G}\, d\mathfrak{s} = U(s_1'). \tag{12}$$

Da wir den Integrationsweg nach Voraussetzung beliebig wählen dürfen, so wählen wir ihn in (12) über s_1; dann gibt die Differenz von (12) und (11)

$$\int_{s_1}^{s_1'} \mathfrak{G}\, d\mathfrak{s} = U(s_1') - U(s_1). \tag{13}$$

Da aber s_1 und s_1' sich unendlich benachbart sind, können wir das Integralzeichen fortlassen und $\mathfrak{G}_s ds$ schreiben, wenn $ds = |d\mathfrak{s}|$ ist. Rechts ist der Zuwachs von U auch unendlich klein, gleich dU, und wenn wir U als Funktion von s uns vorstellen, so ist

$$dU = \frac{\partial U}{\partial s}\, ds,$$

also

$$\mathfrak{G}_s = \frac{\partial U}{\partial s}$$

oder

$$\mathfrak{G} = \operatorname{grad} U. \tag{14}$$

Hier ist U natürlich nur bis auf eine willkürliche Konstante gegeben, da nur die Differentialquotienten Bedeutung haben.

Potentielle Energie. $\mathfrak{f}$ sei ein Potentialvektor, also $\mathfrak{f} = \operatorname{grad} U$, und stelle eine Kraft dar, die auf einen Massenpunkt m wirkt, der die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ hat. Dann lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f}. \tag{15}$$

Multiplizieren wir (15) skalar mit $\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{s}}{dt}$, so erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\mathfrak{v}^2\right) = \mathfrak{f}\frac{d\mathfrak{s}}{dt} = \mathfrak{f}_s \frac{ds}{dt} = \frac{\partial U}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{dU}{dt}. \tag{16}$$

Setzen wir $U = -V$, so haben wir

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\mathfrak{v}^2 + V\right\} = 0$$

oder

$$\frac{m}{2}\mathfrak{v}^2 + V = h, \tag{17}$$

wo h eine von der Zeit unabhängige Konstante ist.

$\frac{m}{2}\mathfrak{v}^2$ ist die kinetische Energie des Massenpunktes, V heißt die potentielle Energie, (17) nennt man das „Integral der lebendigen Kraft".

Bemerkung: Manche Autoren nennen $-\frac{\partial U}{\partial s} = \text{grad}_s U$ den Gradienten von U, sie wählen also die Richtung des stärksten Gefälles zur Richtung des Gradienten, sie haben dann den Vorteil, daß U und nicht $-U$ die potentielle Energie bedeutet, aber dieser Nachteil bei uns wird aufgewogen durch größere Einfachheit in der Vorzeichenbestimmung bei den später zu behandelnden Vektorbeziehungen. Übrigens entspricht unsere Bezeichnungsweise auch mehr der in der Differentialrechnung üblichen.

Anstatt des Operationszeichens grad wird auch häufig das Zeichen ∇ in der Literatur angewendet, es ist von Hamilton eingeführt worden und wird „nabla" gesprochen. „nabla" ist hebräisch und bedeutet ein harfenartiges Musikinstrument, dessen Gestalt ungefähr ∇ sein soll.

§ 2.

Der Gaußsche Integralsatz und die Divergenz.

X sei eine stetige Funktion der Koordinaten in einem endlichen Raumgebiet S, welches von der Oberfläche σ begrenzt ist.

In dem Raumintegral $\int \frac{\partial X}{\partial x} dS = \iiint \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz$ läßt sich die Integration nach x bei konstantem y und z sofort ausführen, und man erhält als Integranden für $dz\,dy$ die Funktion X, und zwar positiv an der oberen Grenze, negativ an der unteren. Die Integration nach x erfolgt auf einer Parallelen zur x-Achse; diese treffe die Oberfläche σ in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4, dann ist (cf. Fig. 14, S. 30)

$$\int \frac{\partial X}{\partial x} dS = \iint dy dz\,(X_4 - X_3 + X_2 - X_1). \qquad (1)$$

In diesen Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 konstruieren wir die äußere Normale n auf σ. Über dem unendlich kleinen Recht-

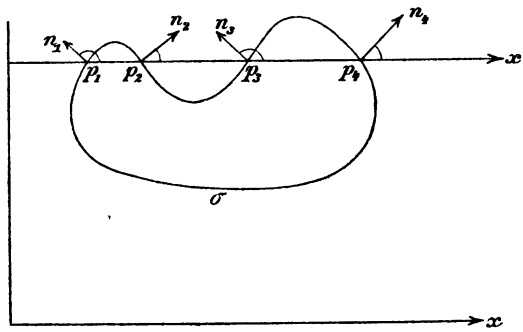


Fig. 14.

eck $dydz$ in der yz-Ebene (cf. Fig. 15) konstruieren wir einen prismatischen Stab parallel der x-Achse, der aus der Oberfläche bei p_1, p_2, p_3, p_4 resp. die Oberflächenelemente $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, $d\sigma_4$ ausschneidet, so daß $dydz$ als Projektion dieser Flächenelemente betrachtet werden kann. Mit der wachsenden x-Achse bilden n_2, n_4 spitze, n_1, n_3 stumpfe Winkel, so daß wir haben

$$\begin{aligned} dydz &= -\cos(n_1, x)\, d\sigma_1 = +\cos(n_2, x)\, d\sigma_2 \\ &= -\cos(n_3, x)\, d\sigma_3 = +\cos(n_4, x)\, d\sigma_4. \end{aligned} \tag{2}$$

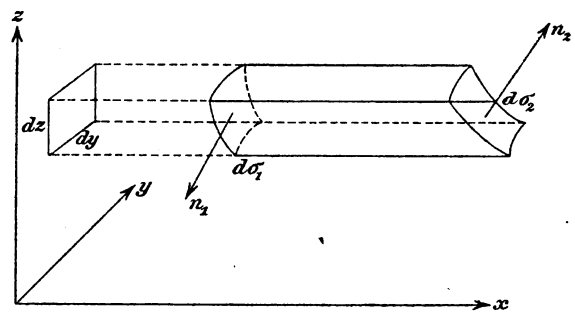


Fig. 15.

Für ein Integrationselement ergibt sich also

$$\begin{aligned} (X_4 - X_3 + X_2 - X_1)\, dy\, dz = X_1 \cos(n_1, x)\, d\sigma_1 + X_2 \cos(n_2, x)\, d\sigma_2 \\ + X_3 \cos(n_3, x)\, d\sigma_3 + X_4 \cos(n_4, x)\, d\sigma_4. \end{aligned} \tag{3}$$

Summieren wir über alle $dy\,dz$, so kommen alle Oberflächenelemente $d\sigma$ von σ vor, und wir haben

$$\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dS = \int X \cos(n, x)\, d\sigma. \tag{4}$$

Rechts ist die Funktion X und der Wert von $\cos(n, x)$ für jeden Oberflächenpunkt zu nehmen und mit dem entsprechenden Oberflächenelement $d\sigma$ zu multiplizieren.

Schreiben wir (4) hin, indem wir X durch zwei andere Funktionen Y resp. Z ersetzen und gleichzeitig x mit y resp. z vertauschen, und addieren alle so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich

$$\int_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dS$$

$$= \int_\sigma \left(X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z)\right) d\sigma. \tag{5}$$

Fassen wir X, Y, Z als rechtwinklige Komponenten eines Vektors $\mathfrak{A}$ auf, so geht der Integrand der rechten Seite in $\mathfrak{A}_n$ über, und wir erhalten

$$\int_S \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right) dS = \int_\sigma \mathfrak{A}_n d\sigma. \tag{6}$$

Dies ist der Gaußsche Integralsatz, er verwandelt ein Raumintegral in ein Oberflächenintegral oder umgekehrt.

Da die rechte Seite vom Koordinatensystem unabhängig ist, so ist es auch das Raumintegral links; den Integranden desselben nennen wir die Divergenz von $\mathfrak{A}$ und schreiben

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Diese Größe ist ein Skalar, welcher vom Koordinatensystem unabhängig ist. (6) läßt sich vom Koordinatensystem unabhängig schreiben:

$$\int_S \operatorname{div} \mathfrak{A}\, dS = \int_\sigma \mathfrak{A}_n d\sigma. \tag{6'}$$

Wählen wir anstatt des Raumes S ein einzelnes Volumelement dS mit der Oberfläche σ, so ergibt (6′)

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\Sigma \mathfrak{A}_n d\sigma}{dS}. \tag{8}$$

Σ bedeutet die Summation über die Oberfläche von dS.

div $\mathfrak{A}$ bedeutet also das Oberflächenintegral von $\mathfrak{A}$ über eine (unendlich klein gedachte) Volumeinheit.

Aus (7) oder (8) folgt

$$\operatorname{div} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \operatorname{div} \mathfrak{A} + \operatorname{div} \mathfrak{B}. \tag{9}$$

Je nachdem wir die Form von dS annehmen, nämlich als Raumelement bei rechtwinkligen Koordinaten oder bei Polar- oder Zylinderkoordinaten, erhalten wir div $\mathfrak{A}$ in verschiedenen Koordinatensystemen ausgedrückt, wie wir später noch eingehender sehen werden. Wir wollen div $\mathfrak{A}$ als einfachstes Beispiel noch einmal in kartesischen Koordinaten bestimmen, und zwar auf Grund der Definitionsgleichung (8).

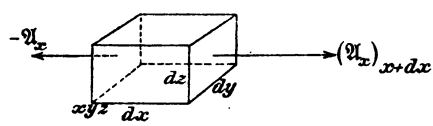


Fig. 16.

Zu dem Zwecke wählen wir ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepiped parallel den Koordinatenebenen mit den Kanten dx, dy, dz (cf. Fig. 16); es ist also

$$dS = dx \cdot dy \cdot dz. \tag{10}$$

Das Oberflächenelement besteht aus sechs Termen, entsprechend den sechs Seitenflächen oben, unten, vorne, hinten, rechts, links.

Die äußere Normale an der rechten Seitenfläche ist $+ x$, die äußere Normale an der linken Seitenfläche ist $- x$. Der Beitrag der linken Seitenfläche (mit der Koordinate x) ist also $- \mathfrak{A}_x dy\, dx$, der der rechten mit der Koordinate $x + dx$ ist $+ (\mathfrak{A}_x)_{x+dx} \cdot dy\, dz$. Entwickeln wir diesen Ausdruck nach der Taylorschen Reihe und vernachlässigen höhere Potenzen von dx, so erhalten wir als Beitrag der rechten Seitenfläche

$$\left(\mathfrak{A}_x + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz.$$

Beide Flächen zusammen ergeben also den Beitrag $\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} dx\,dy\,dz$. Nimmt man noch die anderen vier Seitenflächen hinzu, so wird

$$\Sigma \mathfrak{A}_n d\sigma = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \tag{11}$$

Also ergibt (8) mit Hilfe von (10) und (11)

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z},$$

wie wir in (7) bereits gefunden hatten.

Bemerkung: In der Mathematik ist es üblich, nicht die äußere Normale n, wie wir es taten, sondern die innere Normale einzuführen, weil damit ganz sicher zum Ausdruck gebracht ist, daß man die Funktion nur im Raume S zu kennen oder gar zu definieren braucht. Wir haben die äußere Normale gewählt, um das lästige Minuszeichen zu vermeiden, und bestimmen, daß wir den Differentialquotienten an der Oberfläche im Innern bilden wollen, also auch nur die Werte in S zu kennen brauchen.

Wir müssen uns jetzt über die geometrische Bedeutung von $\int \mathfrak{A}_n d\sigma$ orientieren. Wir haben uns ein Bild eines Vektorfeldes Kapitel I (§ 1) gemacht, indem wir so viele $\mathfrak{A}$-Linien auf einer zur Feldrichtung senkrechten (unendlich klein gedachten) Flächeneinheit konstruierten, wie der Betrag $|\mathfrak{A}|$ angibt. Dann durchsetzen die Fläche $d\Sigma$, die senkrecht zu $\mathfrak{A}$ steht, $|\mathfrak{A}|\,d\Sigma$ $\mathfrak{A}$-Linien. Alle diese Linien gehen auch durch das Flächenelement $d\sigma$ der von uns betrachteten Oberfläche σ hindurch (cf. Fig. 17), welches durch die vom Rande von $d\Sigma$ ausgehenden $\mathfrak{A}$-Linien aus σ ausgeschnitten wird, und es ist, wie die Fig. 17 sofort ergibt,

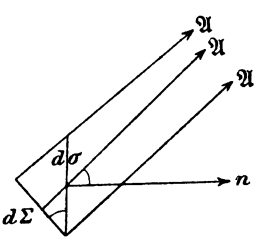


Fig. 17.

$$d\Sigma = d\sigma \cos(n, \mathfrak{A}).$$

Durch das Element $d\sigma$ gehen also

$$|\mathfrak{A}|\,d\Sigma = |\mathfrak{A}|\cos(n, \mathfrak{A})\,d\sigma = \mathfrak{A}_n d\sigma$$

Linien.

$\int \mathfrak{A}_n d\sigma$ bedeutet also die Anzahl $\mathfrak{A}$-Linien, die durch σ von innen nach außen hindurchtreten. (Dabei sind von selbst die von außen nach innen hindurchgehenden als negativ in Rechnung gesetzt, da bei ihnen $\cos(n, \mathfrak{A}) < 0$ ist.) $\int \mathfrak{A}_n d\sigma$ gibt also die Zahl in S entspringender $\mathfrak{A}$-Linien an, denn die, welche nur durch S hindurchgehen, werden einmal als positiv, einmal als negativ gerechnet.

Nach (8) bedeutet also div $\mathfrak{A}$ die Anzahl in der Volumeinheit entspringender $\mathfrak{A}$-Linien.

Ist die Divergenz eines Vektors $\mathfrak{A}$ im ganzen Raume Null, so kann nirgends eine $\mathfrak{A}$-Linie entstehen oder enden, die $\mathfrak{A}$-Linien müssen in geschlossenen Bahnen verlaufen; ein solcher Vektor heißt ein solenoidaler Vektor (δ $\sigma\omega\lambda\dot{\eta}\nu$ die Röhre). An Stellen positiver Divergenz entspringen $\mathfrak{A}$-Linien, an Stellen negativer Divergenz münden $\mathfrak{A}$-Linien; diese Stellen werden deshalb auch Quellen resp. Senken genannt.

Wie wir soeben sahen, bedeutet $\mathfrak{A}_n d\sigma$ die Anzahl durch $d\sigma$ hindurchgehender $\mathfrak{A}$-Linien, ebenso bedeutet der in Kapitel I § 6 behandelte Ausdruck $\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{A}_n|[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]|$ (wenn n die positive Normale auf dem aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildeten Parallelogramm bedeutet) die Anzahl $\mathfrak{A}$-Linien, die durch das aus $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gebildete Parallelogramm hindurchgehen.

Nach der Faradayschen Auffassung der Elektrizität geht von jeder positiven Elektrizitätsmenge 1 eine Kraftlinie aus, bei jeder negativen Elektrizitätsmenge 1 mündet eine Kraftlinie („Kraftlinien" ist ein ungeschickt gewähltes Wort für „Erregungslinien", denn es handelt sich um den Vektor $\mathfrak{D}$, die elektrische Erregung). Die aus der Volumeinheit herauskommende Zahl $\mathfrak{D}$-Linien wird also einerseits durch div $\mathfrak{D}$ bestimmt, anderseits ist diese Anzahl ein Maß für die in der

Volumeinheit enthaltene Elektrizitätsmenge, d. h. für die räumliche Dichte ϱ der Elektrizität, also ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho. \tag{12}$$

Bemerkung: Manche Autoren gebrauchen anstatt div $\mathfrak{A}$ das Symbol $\nabla \mathfrak{A}$, andere schreiben $S \nabla \mathfrak{A}$.

§ 3.

Der Stokessche Integralsatz und die Rotation.

Es sei eine beliebige geschlossene Kurve s gegeben, wir betrachten das Linienintegral $\int_s \mathfrak{A} d\mathfrak{s}$ über diese geschlossene Kurve und suchen, es in ein Flächenintegral zu verwandeln. Zu diesem Zwecke legen wir durch s eine beliebige Fläche σ, die s zur Randkurve hat, und errichten in jedem Punkte von σ die Normale n und zwar in dem Sinne, daß ein Vorwärtsgehen auf s und gleichzeitiges Vorwärtsgehen in Richtung von $+n$ der Korkzieherregel entspricht.

1. In Fig. 18 stelle s die geschlossene Kurve dar; die hindurchgelegte Fläche σ zerlegen wir durch ein Kurvensystem in Teilflächen. Dann ergibt sich leicht, daß das Linienintegral $\int \mathfrak{A} d\mathfrak{s}$, über s genommen, gleich ist der Summe der Linienintegrale über die Begrenzungen der einzelnen Teilflächen. Denn jedes Stück einer Begrenzungslinie gehört zwei benachbarten Teilflächen an und wird, da der Umlaufungssinn immer derselbe ist, bei den Integrationen um diese beiden aneinanderstoßenden Teilflächen in entgegengesetztem Sinne durchlaufen (cf. Fig 18), es bringt also keinen Beitrag zur Summe der Linienintegrale, einen Beitrag geben nur die Teile der Randkurve s selbst, weil diese nur einmal durchlaufen werden.

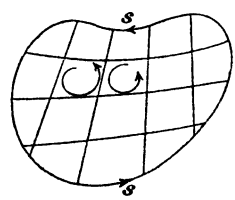


Fig. 18.

2. Wir wählen ein spezielles Flächenstück, für dessen Begrenzung wir das Linienintegral bilden wollen: ein unendlich

kleines Rechteck mit den Seiten dy, dz parallel den entsprechenden Koordinatenachsen; dann wird

$$\int_{\mathfrak{S}} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = (\mathfrak{A}_z\, dz)_{y+dy} - (\mathfrak{A}_y dy)_{z+dz} - (\mathfrak{A}_z dz)_y + (\mathfrak{A}_y dy)_z, \quad (1)$$

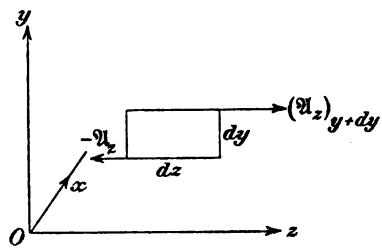


Fig. 19.

wie die Betrachtung der Figur sofort ergibt. Wir haben dabei links oben angefangen zu integrieren und sind der Pfeilrichtung gefolgt.

Die Entwickelung nach dem Taylorschen Lehrsatz ergibt bei Vernachlässigung höherer Potenzen von dy und dz

$$\int_{\mathfrak{S}} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = \left(\mathfrak{A}_z + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} dy\right) dz - \left(\mathfrak{A}_y + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} dz\right) dy - \mathfrak{A}_z dz + \mathfrak{A}_y dy = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right) dy\, dz. \quad (2)$$

Nennen wir die Fläche $d\sigma_x$, so ist

$$\int_{\mathfrak{S}} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s} = \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right) d\sigma_x. \quad (2')$$

(2′) gilt bei Berücksichtigung von 1. für ein beliebig gestaltetes Flächenstück in der yz-Ebene. Es ist also

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} = \frac{\Sigma \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s}}{d\sigma_x}. \quad (3)$$

Definieren wir nun einen Vektor $\mathfrak{R}$ durch die Komponenten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \\ \mathfrak{R}_y &= \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \\ \mathfrak{R}_z &= \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}, \end{aligned} \quad (4)$$

so lautet (3): $\mathfrak{R}_x$ ist das Linienintegral von $\mathfrak{A}$ um eine (unendlich klein gedachte) Flächeneinheit, deren positive Normale x ist.

3. Wir bilden ein unendlich kleines Tetraeder durch die drei Koordinatenebenen und eine vierte Ebene mit der Normalen n. Die Inhalte der Flächen sind resp.

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \sigma_z, \quad \sigma,$$

und es ist

$$\sigma_x = \sigma \cos(n, x); \quad \sigma_y = \sigma \cos(n, y); \quad \sigma_z = \sigma \cos(n, z). \tag{5}$$

Ferner bilden wir die Linienintegrale um σ_x, σ_y, σ_z im positiven Sinne, dieselben ergeben nach (2′) und (4) resp. $\mathfrak{R}_x\sigma_x$, $\mathfrak{R}_y\sigma_y$, $\mathfrak{R}_z\sigma_z$. Addieren wir dieselben und beachten wir, daß alle Kanten zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden, bis auf die gefiederten Kanten der Hypotenusenfläche (Fig. 20), so ist das Linienintegral um diese beliebig gestellte Hypotenusenfläche

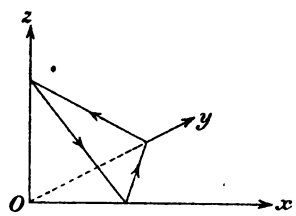


Fig. 20.

$$\Sigma \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \mathfrak{R}_x\sigma_x + \mathfrak{R}_y\sigma_y + \mathfrak{R}_z\sigma_z \tag{6}$$

oder mit Benutzung von (5)

$$\begin{aligned}\Sigma \mathfrak{A} d\mathfrak{s} &= \left(\mathfrak{R}_x \cos(nx) + \mathfrak{R}_y \cos(ny) + \mathfrak{R}_z \cos(nz)\right) d\sigma \\ &= \mathfrak{R}_n d\sigma.\end{aligned} \tag{7}$$

Wir nennen den Vektor $\mathfrak{R}$ die Rotation von $\mathfrak{A}$ und schreiben:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \operatorname{rot} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{R}_n &= \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}.\end{aligned} \tag{8}$$

Dann wird aus (7)

$$\mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \operatorname{rot}_n \mathfrak{A} d\sigma. \tag{7′}$$

Diese Gleichung gilt zunächst nur für eine beliebig gestaltete unendlich kleine ebene Fläche σ wegen 2., da aber wegen 1. das Linienintegral längs einer beliebigen Kurve zusammengesetzt werden kann aus den Linienintegralen um unendlich kleine, also als eben aufzufassende Flächen, so gilt

$$\int_s \mathfrak{A} d\mathfrak{s} = \int_\sigma \operatorname{rot}_n \mathfrak{A} d\sigma \tag{7″}$$

für jede geschlossene Kurve s. (7″) bildet den Ausdruck des Stokesschen Satzes.

Durch (7′) ist ein Vektor rot $\mathfrak{A}$ unabhängig vom Koordinatensystem definiert, denn für ein unendlich kleines Flächenstück $d\sigma$ mit der positiven Normale n ist

$$\text{rot}_n \mathfrak{A} = \frac{\Sigma \mathfrak{A} ds}{d\sigma}. \tag{9}$$

Die Komponente von rot $\mathfrak{A}$ nach einer beliebigen Richtung n ist also gleich dem Linienintegral von $\mathfrak{A}$ um eine senkrecht zu n gestellte (unendlich klein gedachte) Flächeneinheit.

Aus (4) oder (9) folgt

$$\text{rot}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \text{rot}\,\mathfrak{A} + \text{rot}\,\mathfrak{B}. \tag{10}$$

Die Richtung des Vektors rot $\mathfrak{A}$ selbst findet man folgendermaßen: Man gebe der unendlich kleinen Flächeneinheit alle möglichen Stellungen, bilde das Linienintegral um dieselbe und wähle die Fläche aus, für die dieses Integral am größten ist, die positive Normale auf der Fläche in dieser Stellung gibt die Richtung, das Integral selbst den Betrag der Rotation.

Bei der Ableitung des Stokesschen Satzes war die Fläche σ ganz beliebig bis auf die Bestimmung, daß sie s zur Randkurve hat. Legen wir also zwei Flächen σ_1 und σ_2 durch s, so wird

$$\int_{\sigma_1} \text{rot}_n \mathfrak{A}\, d\sigma_1 = \int_{\sigma_2} \text{rot}_n \mathfrak{A}\, d\sigma_2. \tag{11}$$

σ_1 und σ_2 bilden zusammen eine geschlossene Fläche σ, aber ist n auf σ_1 die äußere Normale, so ist es auf σ_2 die innere Normale, da immer die Richtung von n durch die Korkzieherregel gegeben ist. Führen wir aber anstatt der inneren Normalen auf σ_2 auch die äußere Normale n' ein, so wird aus (11)

$$\int_{\sigma_1} \text{rot}_n \mathfrak{A}\, d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \text{rot}_{n'} \mathfrak{A}\, d\sigma_2 = 0, \tag{11′}$$

oder wenn wir die beiden Integrale zusammenfassen, die ganze geschlossene Fläche σ und ihre äußere Normale n nennen

$$\int_{\sigma} \text{rot}_n \mathfrak{A}\, d\sigma = 0. \tag{12}$$

Das bedeutet aber nach den Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen S. 34:

Läßt ein Vektor $\mathfrak{R}$ sich als Rotation eines anderen Vektors $\mathfrak{A}$ darstellen, so haben die $\mathfrak{R}$-Linien nirgends Anfang oder Ende, sondern verlaufen in geschlossenen Bahnen.

Später werden wir beweisen, daß auch der umgekehrte Satz gilt, d. h. daß ein Vektor sich als Rotation eines anderen darstellen läßt, wenn sein Flächenintegral über jede geschlossene Fläche verschwindet.

Bemerkung: Anstatt rot $\mathfrak{A}$ schreiben manche Schriftsteller curl $\mathfrak{A}$ oder quirl $\mathfrak{A}$ oder $V\nabla\mathfrak{A}$.

§ 4.
Beziehungen zwischen den Differentialoperationen.

1. Auf Gleichung (12) des vorigen Paragraphen wenden wir den Gaußschen Satz § 2 (6′) an und erhalten

$$\int \text{div rot } \mathfrak{A} \cdot dS = 0. \tag{1}$$

Da der Raum S beliebig ist, so muß der Integrand selbst verschwinden, es gilt also für jeden Vektor $\mathfrak{A}$

(l) $$\text{div rot } \mathfrak{A} = 0. \tag{2}$$

2. In Gleichung (7″) des vorigen Paragraphen setzen wir für den Vektor $\mathfrak{A}$ den Gradienten eines Skalars U, also

$$\mathfrak{A} = \text{grad } U. \tag{3}$$

Dann verschwindet die linke Seite wegen § 1 (9′), und wir erhalten

$$\int_\sigma \text{rot}_n \text{ grad } U d\sigma = 0. \tag{4}$$

Da die Fläche σ beliebig ist, so muß der Integrand selbst verschwinden, wir haben also für jeden Skalar U

(m) $$\text{rot grad } U = 0. \tag{5}$$

3. Die Umkehrung dieser Formel müssen wir etwas näher betrachten; es fragt sich, ob ein Vektor $\mathfrak{G}$, dessen rot Null

ist, sich immer als Potentialvektor darstellen läßt, sich also immer als Gradient eines Skalars U ergibt, und wenn ja, ob U immer einwertig ist, oder mehrwertig sein kann.

Nach dem Stokesschen Satze ist:

$$\int_s \mathfrak{G}\, d\mathfrak{s} = \int_\sigma \mathrm{rot}_n \mathfrak{G}\, d\sigma. \tag{6}$$

Da nun aber $\mathrm{rot}\, \mathfrak{G} = 0$ wegen der Voraussetzung, so folgt

$$\int_s \mathfrak{G}\, d\mathfrak{s} = 0 \tag{7}$$

und daraus wegen § 1 Satz 2:

$$\mathfrak{G} = \mathrm{grad}\, U. \tag{8}$$

Beim Schluß von (6) auf (7) ist nun aber stillschweigend vorausgesetzt, daß auf σ überall $\mathrm{rot}\, \mathfrak{G} = 0$ ist, d. h. daß die ganze Fläche σ dem Raume S angehört, in dem nach Voraussetzung $\mathrm{rot}\, \mathfrak{G} = 0$ ist.

Nun kommen aber Fälle vor, in denen die Kurve s zwar vollkommen in dem betrachteten Raume S liegt, aber trotzdem sich keine Fläche σ durch s legen läßt, die ganz in S verläuft. Solche Räume heißen mehrfach zusammenhängende Räume.

Ein einfaches Beispiel eines mehrfach zusammenhängenden Raumes ist das Innere eines Kreisringes, der durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende, aber den Kreis nicht schneidende Gerade entsteht. Die Kurve, welche der Kreismittelpunkt bei der Rotation beschreibt, ist eine solche Kurve s, die vollständig in S liegt, durch die sich aber keine Fläche σ legen läßt, die ganz in S verläuft.

Kann man es durch das Anbringen von $n-1$ Querschnitten, deren beide Seiten man zur Begrenzung hinzunimmt, bewerkstelligen, daß der Raum einfach zusammenhängend wird, d. h. daß durch eine beliebige Kurve s eine Fläche σ gelegt werden kann, die ganz in S verläuft, so heißt der Raum n-fach zusammenhängend.

Der Kreisring ist zweifach zusammenhängend, denn z. B. durch einen Meridianschnitt T wird er einfach zusammenhängend. Fig. 21 stellt den Äquatorialschnitt eines durch T einfach zusammenhängend gemachten Kreisrings dar. Das Linienintegral $\int_{\mathfrak{s}} \mathfrak{G} d\mathfrak{s}$ über die punktiert gezeichnete Kurve $s = ACBB'C'A'A$ ist jetzt Null, es gibt also ein Potential U, und da die Anteile über $A'A$ und $B'B$ entgegengesetzt gleich sind, folgt

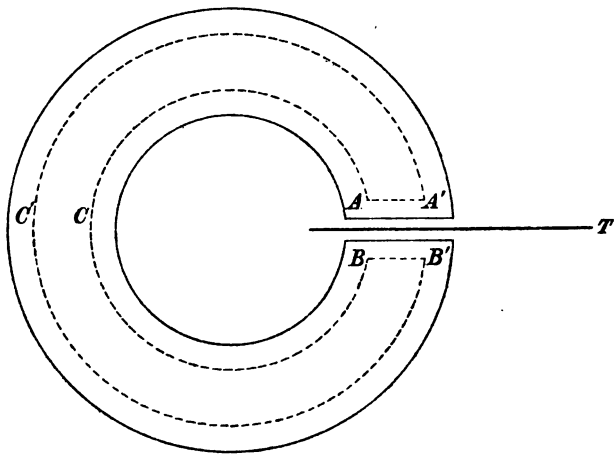


Fig. 21.

$$(c)\int_{A}^{B} \mathfrak{G} d\mathfrak{s} = (c')\int_{A'}^{B'} \mathfrak{G} d\mathfrak{s} \tag{9}$$

oder

$$U_B - U_A = U_{B'} - U_{A'} = \mathfrak{j}. \tag{10}$$

Am Querschnitt erleidet das Potential U also einen konstanten Sprung $\mathfrak{j}$, und wenn man den Querschnitt wieder fortläßt, so ist U eine mehrwertige Funktion des Ortes; ist $\mathfrak{G}$ eine Kraft, so bedeutet das, daß beim einmaligen Umkreisen die Arbeit $\mathfrak{j}$ geleistet wird. Solche Verhältnisse liegen z. B. vor, wenn in der Rotationsachse des Ringes ein Strom $\mathfrak{j}$ (elektromagnetisch gemessen) fließt und $\mathfrak{G}$ die Kraft auf die

magnetische Menge 1 bedeutet. Hierauf werden wir später zurückkommen.

4. In dem Ausdruck § 2 (7)

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z} \tag{11}$$

setze man

$$\mathfrak{A} = \operatorname{grad} U, \tag{12}$$

d. h.

$$\mathfrak{A}_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mathfrak{A}_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{12'}$$

so ergibt sich

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{13}$$

Schreibt man für den von Lamé so genannten zweiten Differentialparameter von U

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U,$$

so ergibt sich aus (13)

(n)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \Delta U \tag{13'}$$

als unabhängig vom Koordinatensystem.

5. Wir wollen die X-Komponente des Vektors rot rot $\mathfrak{A}$ bilden. Setzen wir rot $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}$, so lautet dieselbe nach § 3 (4)

$$\frac{\partial \mathfrak{R}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial z}, \tag{14}$$

wobei $\mathfrak{R}$ den in § 3 (4) angegebenen Wert hat. Also folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \mathfrak{A} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial x \partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial z^2}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Durch Addition und Subtraktion von $\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2}$ ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2}\right).$$

Wenden wir den Operator Δ auch auf Vektoren an, setzen wir also

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial z^2} = \Delta \mathfrak{A}_x,$$

so erhalten wir

(o)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}. \tag{16}$$

6. Ebenso folgt durch Ausrechnung in kartesischen Koordinaten:

$$\text{(p)} \qquad \operatorname{div}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B} \tag{17}$$

$$\text{(q)} \quad \operatorname{rot}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = \mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} + (\mathfrak{B}\operatorname{grad})\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\operatorname{grad})\mathfrak{B} \tag{18}$$

$$\text{(r)} \quad (\mathfrak{A}\operatorname{grad})\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\operatorname{grad})\mathfrak{A} = \operatorname{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - [\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{B}] - [\mathfrak{B}\operatorname{rot}\mathfrak{A}]. \tag{19}$$

Hierin bedeutet der Operator $(\mathfrak{A}\operatorname{grad})$, auf einen Vektor angewandt:

$$(\mathfrak{A}\operatorname{grad}) = \mathfrak{A}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{A}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{A}_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

7. Ferner ist

$$\operatorname{div}(\mathfrak{A}U) = \frac{\partial}{\partial x}(U\mathfrak{A}_x) + \frac{\partial}{\partial y}(U\mathfrak{A}_y) + \frac{\partial}{\partial z}(U\mathfrak{A}_z),$$

also

$$\text{(s)} \qquad \operatorname{div}(\mathfrak{A}U) = U\cdot\operatorname{div}\mathfrak{A} + (\mathfrak{A}\cdot\operatorname{grad}U). \tag{20}$$

Die Ausrechnung dieser letzten Formeln sei dem Leser überlassen; ich mache noch einmal darauf aufmerksam, daß alle Ausdrücke vom Koordinatensystem unabhängig sind, daß man also z. B. ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem zur Zwischenrechnung benutzen kann; die Beziehung auf dasselbe fällt im Endresultat natürlich wieder heraus.

§ 5.

Der Greensche Satz.

Setzt man in (*s*)

$$\mathfrak{A} = \operatorname{grad} V,$$

so folgt:

$$\operatorname{div}(U\operatorname{grad}V) = U\operatorname{div}\operatorname{grad}V + \operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V. \tag{1}$$

Vertauschung von U und V ergibt

$$\operatorname{div}(V\operatorname{grad}U) = V\operatorname{div}\operatorname{grad}U + \operatorname{grad}U\cdot\operatorname{grad}V. \tag{1'}$$

Auf den ersten Term rechts wenden wir (*n*) an, subtrahieren (1') von (1), integrieren über einen Raumteil S mit der Oberfläche σ und erhalten, wenn wir auf die linke Seite den Gaußschen Integralsatz anwenden,

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma = \int(U\Delta V - V\Delta U)\,dS. \tag{2}$$

Setzt man in (1)

$$V = U,$$

so folgt

$$\operatorname{div}(U \cdot \operatorname{grad} U) = U \operatorname{div} \cdot \operatorname{grad} U + (\operatorname{grad} U)^2. \tag{3}$$

Auf den ersten Term rechts wenden wir (n) an, integrieren über einen Raumteil S mit der Oberfläche σ und erhalten, wenn wir auf die linke Seite den Gaußschen Integralsatz anwenden,

$$\int (\operatorname{grad} U)^2 dS + \int U \Delta U d S = \int U \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma. \tag{4}$$

(2) und (4) sind von Green gefunden.

Satz: Ein Vektor $\mathfrak{A}$ ist in einem einfach zusammenhängenden Raum S eindeutig gegeben, wenn im ganzen Raume div $\mathfrak{A}$ und rot $\mathfrak{A}$ und auf der Oberfläche σ von S die Normalkomponente von $\mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}_n$ gegeben ist.

Folgender Beweis ist typisch für die Art der Eindeutigkeitsbeweise in der mathematischen Physik:

Angenommen, es gäbe noch einen zweiten Vektor $\mathfrak{A}'$ außer $\mathfrak{A}$, der denselben Bedingungen genügt wie $\mathfrak{A}$, so würde $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ den Bedingungen genügen

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \quad (5a) \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{B} = 0 \quad (5b) \qquad \mathfrak{B}_n = 0 \quad (5c).$$

Wegen (5b) kann man in einfach zusammenhängenden Räumen nach § 4, 3. setzen

$$\mathfrak{B} = \operatorname{grad} U,$$

also ist wegen (5a) und (n)

$$\Delta U = 0. \tag{6}$$

Wegen (5c) ist

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0. \tag{7}$$

Setzen wir (6) und (7) in (4) ein, so folgt

$$\int (\operatorname{grad} U)^2 d S = 0, \tag{8}$$

und da der Integrand wesentlich positiv ist, muß er im ganzen Raum verschwinden; d. h.

$$\operatorname{grad} U = \mathfrak{B} = 0 \tag{9}$$

oder

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'. \tag{10}$$

Wir können den Beweis, daß $\mathfrak{B} = 0$, wenn (5) erfüllt ist, auch auf eine mehr geometrische Art führen.

Da rot $\mathfrak{B} = 0$ ist, also auch $\int_{\sigma} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{s} = 0$ in einfach zusammenhängenden Räumen, so folgt aus § 1 Satz 1, daß es in S keine geschlossenen $\mathfrak{B}$-Linien gibt; aus div $\mathfrak{B} = 0$ folgt, daß in S nirgends $\mathfrak{B}$-Linien entspringen oder münden (§ 2); und aus $\mathfrak{B}_n = 0$ folgt, daß durch die Oberfläche σ keine $\mathfrak{B}$-Linien in S hineintreten, also können keine $\mathfrak{B}$-Linien in S enthalten sein.

Zusatz: Haben wir es mit dem unendlichen Raum S zu tun, so rückt auch σ ins Unendliche und kann z. B. als unendlich große Kugelfläche um einen Punkt O im Endlichen gewählt werden. Läuft keine $\mathfrak{A}$-Linie ins Unendliche, so ist dort $\mathfrak{A}_n = 0$, also gegeben. Aber es genügt nicht, daß $\mathfrak{A}_n$ im Unendlichen überhaupt verschwindet, um sagen zu können, daß keine $\mathfrak{A}$-Linie ins Unendliche gelangt, sondern es muß

$$\int \mathfrak{A}_n\, d\sigma = \int \mathfrak{A}_n R^2 \cdot d\omega,$$

über die Kugelfläche vom unendlich großen Radius R integriert, verschwinden. $d\omega$ bedeutet das Oberflächenelement einer Kugel vom Radius 1. Es folgt, daß $\mathfrak{A}_n$ stärker verschwinden muß wie $\frac{1}{R^2}$, um sagen zu können, daß keine $\mathfrak{A}$-Linien ins Unendliche gelangen.

Verschwindet in (4) im Oberflächen-Integral U wie $\frac{1}{R}$, so verschwindet $\frac{\partial U}{\partial n}$ wie $\frac{1}{R^2}$, also $U \frac{\partial U}{\partial n}$ wie $\frac{1}{R^3}$, folglich ergibt die Integration über die unendlich große Kugel vom Radius R Null.

Verschwindet aber U wie $\frac{1}{R}$, so verschwindet $\mathfrak{B} = \text{grad}\, U$ wie $\frac{1}{R^2}$.

Also ist $\mathfrak{A}$ eindeutig im unendlichen Raum gegeben, wenn div $\mathfrak{A}$, rot $\mathfrak{A}$ gegeben sind und $\mathfrak{A}$ im Unendlichen wenigstens wie $\frac{1}{R^2}$ verschwindet.

§ 6.

Unstetigkeiten.

Bis jetzt haben wir die Vektoren immer als stetige Funktionen des Orts aufgefaßt, doch kommen in den Anwendungen Fälle vor, in denen dies nicht mehr erlaubt ist. Σ sei eine Fläche, in der der Vektor $\mathfrak{A}$ unstetig ist.

1. Wir konstruieren einen Zylinder mit den Grundflächen $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ parallel Σ, dessen Höhe h unendlich klein gegen die Dimensionen der Grundflächen ist, und wenden auf ihn den Gaußschen Satz an. Das Oberflächenintegral über die Mantelfläche fällt dann als unendlich klein von höherer Ordnung fort. Es folgt, wenn wir noch $d\sigma_1 = d\sigma_2 = d\sigma$ setzen

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot h \cdot d\sigma = (\mathfrak{A}_{n_1} + \mathfrak{A}_{n_2}) d\sigma; \tag{1}$$

oder wenn wir eine einzige Normalenrichtung n einführen und die Werte von $\mathfrak{A}$ auf beiden Seiten von Σ durch ein $+$ und $-$ Zeichen unterscheiden (cf. Fig. 22) und durch $d\sigma$ dividieren:

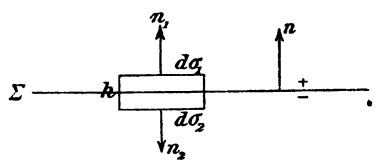


Fig. 22.

$$h \cdot \operatorname{div} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n^+ - \mathfrak{A}_n^-. \tag{2}$$

Ist die Normalkomponente eines Vektors $\mathfrak{A}$ an einer Fläche unstetig, so wird dort $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ unendlich groß, weil h in (2) unendlich klein ist; aber $h \cdot \operatorname{div} \mathfrak{A}$ bleibt endlich. Setzen wir

$$h \cdot \operatorname{div} \mathfrak{A} = \varrho_\sigma, \tag{3}$$

so bedeutet ϱ_σ die Anzahl $\mathfrak{A}$-Linien, die auf der (unendlich klein gedachten) Flächeneinheit von Σ entspringen.

Nehmen wir, wie Faraday in der Elektrizitätslehre, an, daß von der Menge 1 eines Substrats eine $\mathfrak{A}$-Linie in den Raum hinausgeht, so bedeutet, wie wir in § 2 sahen, $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ die räumliche Dichte des Substrats, diese ist hier unendlich groß, wir haben es mit der endlichen Flächendichte ϱ_σ zu tun (cf. Gl. (3)). Es ist

$$\mathfrak{A}_n^+ - \mathfrak{A}_n^- = \varrho_\sigma.$$

Die Gesamtmenge $\int \varrho_\sigma d\Sigma$ des Substrats, d. h. die Gesamtzahl, der auf Σ entspringenden $\mathfrak{A}$-Linien bleibt endlich und ist

$$\int_\Sigma (\mathfrak{A}_n^+ - \mathfrak{A}_n^-) \cdot d\sigma.$$

2) Wir wenden den Stokesschen Satz an auf ein Rechteck, bei dem zwei Gegenseiten h auf Σ senkrecht stehen, während die anderen beiden ds_1 und ds_2 zu Σ parallel sind. h sei gegen ds_1 und ds_2 unendlich klein, so daß die Linienintegrale längs h fortfallen. Dann ist, wenn wir $ds_1 = -ds_2 = ds$ setzen, da $d\sigma = ds \cdot h$ ist,

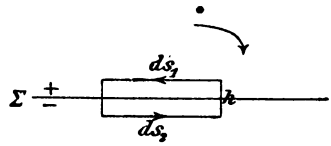


Fig. 23.

$$\mathfrak{A}_{s_1} ds_1 + \mathfrak{A}_{s_2} ds_2 = \mathrm{rot}_t\, \mathfrak{A} ds \cdot h; \tag{4}$$

oder wenn wir eine Richtung s einführen und durch ds dividieren:

$$\mathfrak{A}_s^+ - \mathfrak{A}_s^- = \mathrm{rot}_t\, \mathfrak{A} \cdot h. \tag{5}$$

s und t sind hier aufeinander senkrechte Richtungen in der Fläche Σ. Die Tangentialkomponente $\mathrm{rot}_t \mathfrak{A}$ wird also unendlich groß, doch so, daß das Flächenintegral

$$\int \mathrm{rot}_t\, \mathfrak{A} \cdot d\sigma_t$$

endlich bleibt. Solche Unstetigkeiten kommen in der Elektrodynamik bewegter Medien vor.

3) Den Fall, daß ein Skalar U in einer Fläche unstetig wird, haben wir schon in § 4 betrachtet. Sei der Sprung $U^+ - U^- = \mathfrak{j}$, und haben wir einen Vektor $\mathfrak{G} = \mathrm{grad}\, U$, so wird dieser in der Unstetigkeitsfläche unendlich groß, aber das Linienintegral von einer Seite der Fläche zum gegenüberliegenden Punkt durch die Fläche hindurch ist endlich

$$\mathfrak{G} ds = U^+ - U^- = \mathfrak{j}. \tag{6}$$

Bedeutet $\mathfrak{G}$ eine Kraft, so wird diese in der Fläche unendlich groß, die Arbeit beim Verschieben eines Massenpunktes

durch die Fläche bleibt jedoch endlich. Solche Fälle treten ein bei sogenannten Doppelflächen (elektromotorisch wirksamen Flächen).

§ 7.

Differentialquotienten nach der Zeit.

Haben wir es mit einem zeitlich veränderlichen Felde zu tun, sei dieses nun skalar W oder vektoriell $\mathfrak{W}$, und hat der Träger der Feldeigenschaft, die Materie, eine gewisse Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so kann sich in einem gegebenen Materieteilchen aus zwei Gründen die Feldeigenschaft W (resp. $\mathfrak{W}$) ändern. Erstens kann W (resp. $\mathfrak{W}$) sich ändern, wenn das Teilchen an seinem Orte bleibt, da W (resp. $\mathfrak{W}$) explizite Funktion der Zeit sein soll, zweitens aber auch dadurch, daß das Teilchen sich mit der Zeit verschiebt und an Stellen kommt, wo W (resp. $\mathfrak{W}$) einen anderen Wert als Ortsfunktion hat. Die vollständige Änderung in einem Materieteilchen setzt sich aus diesen beiden Beiträgen zusammen.

Bezeichnen wir die im Materieteilchen stattfindende Änderung von W (resp. $\mathfrak{W}$) in der Zeiteinheit mit $\frac{dW}{dt}$ $\left(\text{resp. } \frac{d\mathfrak{W}}{dt}\right)$, die am gegebenen Ort stattfindende Änderung mit $\frac{\partial W}{\partial t}\left(\text{resp. } \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t}\right)$, so ist

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} \tag{1}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\left.\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial t} + (\mathfrak{v},\ \text{grad}\ W) \\ \text{resp. } \frac{d\mathfrak{W}}{dt} &= \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} + (\mathfrak{v},\ \text{grad})\,\mathfrak{W} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ist z. B. eine Eigenschaft stationär in der fortbewegten Materie, so ist $\frac{d}{dt} = 0$, also $\frac{\partial}{\partial t} = -\,\mathfrak{v}\,\text{grad}$.

Wir wollen die für Anwendungen wichtige Größe $\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathfrak{A}_n d\sigma$, also die in der Zeiteinheit erfolgte Zunahme der Anzahl $\mathfrak{A}$-Linien, die eine in der Materie feste Fläche durchsetzen, betrachten, und anstatt $\frac{d}{dt}$ die Größe $\frac{\partial}{\partial t}$ einführen, also die Änderung am gegebenen Ort.

Die Zahl $\mathfrak{A}$-Linien durch σ kann sich nun zunächst in der Zeit ändern bei festliegender Fläche, weil $\mathfrak{A}$ Funktion von t ist. Dieser Anteil ist

$$\int_\sigma \frac{\partial \mathfrak{A}_n}{\partial t} \cdot d\sigma.$$

Ferner kommt die Veränderung infolge der Verschiebung $\mathfrak{v}dt$ in der Zeit dt hinzu.

Die vom Linienelement $d\mathfrak{s}$ der Randkurve in der Zeit dt überstrichene Fläche ist $|[\mathfrak{v}, d\mathfrak{s}]|\,dt$ (Fig. 24). Nennen wir die Fläche σ in der Lage zur Zeit t σ_1, zur Zeit $t + dt$ σ_2 und die infolge der Verschiebung von der Randkurve beschriebene Fläche σ_3, so bilden σ_1, σ_2, σ_3 zusammen eine geschlossene Fläche, auf die wir den Gaußschen Satz anwenden können. Es ergibt sich

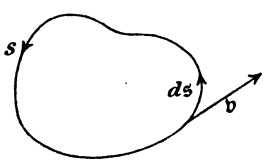


Fig. 24.

$$\int_{\sigma_2} \mathfrak{A}_n d\sigma - \int_{\sigma_1} \mathfrak{A}_n d\sigma + dt \int_s (\mathfrak{A}[d\mathfrak{s}, \mathfrak{v}]) = \int \operatorname{div} \mathfrak{A}\, dS.$$

Der dritte Term links ist wegen (f)

$$dt \int_s [\mathfrak{v}, \mathfrak{A}]\, d\mathfrak{s}$$

und mit Anwendung des Stokesschen Satzes

$$dt \int_{\sigma_1} \operatorname{rot}_n [\mathfrak{v}, \mathfrak{A}]\, d\sigma.$$

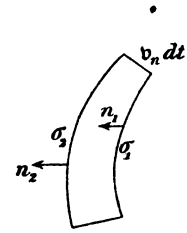


Fig. 25.

Nun ist aber $dS = \mathfrak{v}_n dt\, d\sigma$, also ist die Änderung des Integrals

$$\int_{\sigma_2} \mathfrak{A}_n d\sigma - \int_{\sigma_1} \mathfrak{A}_n d\sigma = \int_{\sigma_1} \operatorname{div} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{v}_n d\sigma \cdot dt + \int_{\sigma_1} \operatorname{rot}_n [\mathfrak{A}, \mathfrak{v}]\, d\sigma \cdot dt$$

oder durch Division durch dt und Hinzufügung des Terms $\int_{\sigma_1} \frac{\partial \mathfrak{A}_n}{\partial t} d\sigma$, welcher durch den ersten Anteil bedingt ist,

$$\frac{d}{dt} \int \mathfrak{A}_n d\sigma = \int d\sigma \left\{ \frac{\partial \mathfrak{A}_n}{\partial t} + \mathfrak{v}_n \operatorname{div} \mathfrak{A} + \operatorname{rot}_n [\mathfrak{A}, \mathfrak{v}] \right\}. \qquad (3)$$

Kapitel III.

Krummlinige Koordinaten, Vektorzerlegungen. Mechanische Deformationen.

§ 1.

Das Linienelement in krummlinigen orthogonalen Koordinaten.

Während wir bisher ein Koordinatensystem absichtlich vermieden haben und nur zu Zwischenrechnungen kartesische Koordinaten eingeführt haben, müssen wir jetzt auch unsere Formeln in krummlinigen Koordinaten zu schreiben suchen. In der mathematischen Physik ist die Anwendung krummliniger Koordinaten von großer Wichtigkeit, da die bei den partiellen Differentialgleichungen auftretenden Grenzbedingungen einfachere Form bei günstig gewähltem Koordinatensystem erhalten.

Wir beschränken uns jedoch auf die für die Anwendungen wichtigsten, die orthogonalen Koordinaten, d. h. auf den Fall, daß die Flächen der verschiedenen Flächenscharen sich rechtwinklig schneiden.

Wir nennen die krummlinigen Koordinaten p_1, p_2, p_3; dp_1, dp_2, dp_3 sei ein Rechtssystem. x, y, z sind als Funktionen der p gegeben:

$$\begin{aligned} x &= f_1(p_1, p_2, p_3) \\ y &= f_2(p_1, p_2, p_3) \\ z &= f_3(p_1, p_2, p_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Das Linienelement auf der Schnittkurve von $p_2 = \text{const}$ und $p_3 = \text{const}$, auf der also nur p_1 sich verändert, stellt sich in der Form dar

$$ds_{p_1} = e_1 dp_1;$$

ebenso ist

$$ds_{p_2} = e_2 dp_2 \tag{2}$$

$$ds_{p_3} = e_3 dp_3,$$

wo die e Funktionen der p sind.

Ändern sich p_1, p_2, p_3 gleichzeitig, so ist

$$ds^2 = e_1^2 dp_1^2 + e_2^2 dp_2^2 + e_3^2 dp_3^2. \tag{3}$$

Die drei Flächenelemente, die man erhält

1. bei const p_1, wenn p_2 und p_3 sich um dp_2 resp. dp_3 ändern
2. „ „ p_2, „ p_3 „ p_1 „ „ dp_3 „ dp_1 „
3. „ „ p_3, „ p_1 „ p_2 „ „ dp_1 „ dp_2 „

sind resp.

$$d\sigma_{p_1} = e_2 e_3 dp_2 dp_3; \quad d\sigma_{p_2} = e_3 e_1 dp_3 dp_1; \quad d\sigma_{p_3} = e_1 e_2 dp_1 dp_2. \tag{4}$$

Das Volumelement, welches begrenzt wird durch die Flächen p_1, $p_1 + dp_1$; p_2, $p_2 + dp_2$; p_3, $p_3 + dp_3$, ist

$$dS = e_1 e_2 e_3 dp_1 dp_2 dp_3. \tag{5}$$

Beispiel 1: Zylinderkoordinaten: Es ist

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \\ z &= z. \end{aligned} \tag{6}$$

Es entsprechen sich also

p_1	p_2	p_3
r	φ	z.

Geometrisch ergibt sich

$$ds_r = dr \qquad ds_\varphi = r\,d\varphi \qquad ds_z = dz,$$

also ist

$$e_1 = 1 \qquad e_2 = r \qquad e_3 = 1.$$

Daraus folgt

$$d\sigma_r = r\,d\varphi\,dz; \quad d\sigma_\varphi = dz\,dr; \quad d\sigma_z = r\,dr\,d\varphi$$

$$dS = r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Beispiel 2: Kugelkoordinaten (räumliche Polarkoordinaten). Es ist

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &= r \cos\vartheta. \end{aligned} \tag{7}$$

Es entsprechen sich also

$$\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \\ r & \vartheta & \varphi. \end{array}$$

Geometrisch ergibt sich

$$ds_r = dr \quad d\mathfrak{s}_\vartheta = r\,d\vartheta \quad d\mathfrak{s}_\varphi = r\sin\vartheta\,d\varphi,$$

also ist

$$e_1 = 1 \qquad e_2 = r \qquad e_3 = r\sin\vartheta.$$

Daraus folgt

$$d\sigma_r = r^2 \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi; \quad d\sigma_\vartheta = r\sin\vartheta\,d\varphi\,dr; \quad d\sigma_\varphi = r\,dr\,d\vartheta$$

$$dS = r^2 \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi.$$

§ 2.

Die Vektoroperationen in krummlinigen Koordinaten.

1. In krummlinigen Koordinaten lautet das skalare Produkt

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}_{p_1}\mathfrak{B}_{p_1} + \mathfrak{A}_{p_2}\mathfrak{B}_{p_2} + \mathfrak{A}_{p_3}\mathfrak{B}_{p_3} \tag{1}$$

und das vektorielle Produkt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]_{p_1} = \mathfrak{A}_{p_2}\mathfrak{B}_{p_3} - \mathfrak{A}_{p_3}\mathfrak{B}_{p_2}. \tag{2}$$

2. Wenden wir die Definition aus Kapitel II § 2 (8)

$$\operatorname{div}\mathfrak{A} = \frac{\int \mathfrak{A}_n\,d\sigma}{dS}$$

auf das oben berechnete Volumelement (vgl. Fig. 26)

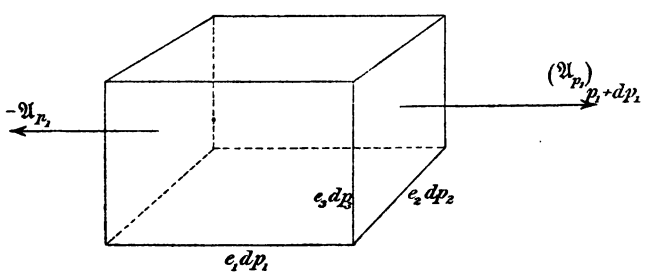


Fig. 26.

$$dS = e_1 e_2 e_3 \, dp_1 dp_2 dp_3$$

an, so erhalten wir:

$$\int \mathfrak{A}_n d\sigma = (\mathfrak{A}_{p_1} e_2 e_3 dp_2 dp_3)_{p_1 + dp_1} - (\mathfrak{A}_{p_1} e_2 e_3 dp_2 dp_3)_{p_1} + \cdots \quad (3)$$

Die durch Punkte angedeuteten Glieder erhält man durch Integration über die zwei anderen Flächenpaare $p_2 = \text{const}$ und $p_3 = \text{const}$.

Entwickeln wir nach Potenzen von dp_1, dp_2, dp_3 und vernachlässigen höhere Potenzen, so bleibt

$$\int \mathfrak{A}_n d\sigma = \left(\frac{\partial}{\partial p_1} e_2 e_3 \mathfrak{A}_{p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2} e_3 e_1 \mathfrak{A}_{p_2} + \frac{\partial}{\partial p_3} e_1 e_2 \mathfrak{A}_{p_3} \right) dp_1 dp_2 dp_3, \quad (4)$$

also ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left\{ \frac{\partial e_2 e_3 \mathfrak{A}_{p_1}}{\partial p_1} + \frac{\partial e_3 e_1 \mathfrak{A}_{p_2}}{\partial p_2} + \frac{\partial e_1 e_2 \mathfrak{A}_{p_3}}{\partial p_3} \right\}. \quad (5)$$

Für Zylinderkoordinaten ergibt das, wenn wir für die e und p die Werte aus § 1 einsetzen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathfrak{A}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}, \quad (6)$$

für Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \mathfrak{A}_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \sin \vartheta \mathfrak{A}_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \mathfrak{A}_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (7)$$

3. In krummlinigen Koordinaten lautet der Gradient gemäß seiner Definition

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_s U &= \frac{\partial U}{\partial s} \\ \operatorname{grad}_{p_1} U &= \frac{\partial U}{e_1 \partial p_1} \\ \operatorname{grad}_{p_2} U &= \frac{\partial U}{e_2 \partial p_2} \\ \operatorname{grad}_{p_3} U &= \frac{\partial U}{e_3 \partial p_3}. \end{aligned} \quad (8)$$

4. Setzen wir in (5)

$$\mathfrak{A} = \operatorname{grad} U,$$

so wird wegen (n)

$$\Delta U = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial p_1} \frac{e_2 e_3}{e_1} \frac{\partial U}{\partial p_1} + \frac{\partial}{\partial p_2} \frac{e_3 e_1}{e_2} \frac{\partial U}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial p_3} \frac{e_1 e_2}{e_3} \frac{\partial U}{\partial p_3} \right\}. \quad (9)$$

In Zylinderkoordinaten ergibt sich:

$$\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial r \frac{\partial U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \tag{9'}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 \frac{\partial U}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \tag{9''}$$

5. Wenden wir die Definition aus Kapitel II § 3 (9)

$$\mathrm{rot}_n \mathfrak{A} = \frac{\int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{s}}{d\sigma_n}$$

auf die Flächenelemente des vorigen Paragraphen an (vgl. Fig. 27), so erhalten wir

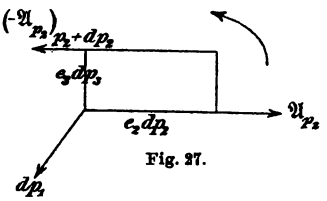


Fig. 27.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}_{p_1}\mathfrak{A} &= \frac{1}{e_2 e_3}\left(\frac{\partial e_3 \mathfrak{A}_{p_3}}{\partial p_2} - \frac{\partial e_2 \mathfrak{A}_{p_2}}{\partial p_3}\right)\\
\mathrm{rot}_{p_2}\mathfrak{A} &= \frac{1}{e_3 e_1}\left(\frac{\partial e_1 \mathfrak{A}_{p_1}}{\partial p_3} - \frac{\partial e_3 \mathfrak{A}_{p_3}}{\partial p_1}\right)\\
\mathrm{rot}_{p_3}\mathfrak{A} &= \frac{1}{e_1 e_2}\left(\frac{\partial e_2 \mathfrak{A}_{p_2}}{\partial p_1} - \frac{\partial e_1 \mathfrak{A}_{p_1}}{\partial p_2}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

§ 3.

Die Potentialgleichung und die Wellengleichung.

Die Laplacesche Gleichung $\Delta U = 0$ lautet in Kugelkoordinaten, wenn U nur von r, aber nicht von ϑ und φ abhängig ist, wegen § 2 (9'')

$$\frac{dr^2 \frac{dU}{dr}}{dr} = 0. \tag{1}$$

Die Integration ergibt

$$U = \frac{a}{r} + b, \tag{2}$$

wo a und b Integrationskonstanten sind.

Wir haben also für $a = 1$ und $b = 0$ das partikulare Integral

$$U = \frac{1}{r}, \tag{2'}$$

wo r den Abstand des variablen Punktes von einem festen Punkte p bedeutet. Da wir Endlichkeit der betrachteten

Größen vorausgesetzt haben, darf p nicht im betrachteten Raum S liegen, weil U dort unendlich würde.

Für zwei Skalare U und V gilt nach S. 43 (2)

$$\int\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)d\sigma=\int(U\Delta V-V\Delta U)\,dS. \tag{3}$$

Wollen wir $U=\frac{1}{r}$ setzen und liegt p in S, so können wir, um p auszuschalten, eine Kugel vom Radius a um p schlagen, und rechnen den Kugelraum nicht mit zu S. Den so veränderten Raum nennen wir S'. Die Kugeloberfläche muß mit zu σ gerechnet werden, auf ihr fällt die äußere Normale von S' mit $-a$ zusammen.

Da $\Delta U=0$ ist wegen (2'), so haben wir

$$\int\frac{\Delta V}{r}dS'=\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma$$
$$+\int\left(V\frac{\partial\frac{1}{a}}{\partial a}-\frac{1}{a}\frac{\partial V}{\partial a}\right)a^2d\omega, \tag{4}$$

wenn $d\omega$ das Oberflächenelement der Einheitskugel ist (also $d\sigma=a^2d\omega$).

Nun ist

$$\frac{\partial\frac{1}{a}}{\partial a}=-\frac{1}{a^2}. \tag{5}$$

Folglich

$$\int\frac{\Delta V}{r}dS'-\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma$$
$$=-\int Vd\omega-a\int\frac{\partial V}{\partial a}d\omega. \tag{6}$$

Lassen wir jetzt die Kugel sich immer mehr zusammenziehen, so wird $S'=S$, das letzte Glied rechts verschwindet, $\int Vd\omega$ wird $4\pi V_p$, wenn V_p den Wert von V im Punkte p bedeutet, und wir haben

$$4\pi V_p=-\int\frac{\Delta V}{r}dS+\int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)d\sigma. \tag{7}$$

Betrachten wir den unendlichen Raum, und verschwindet V im Unendlichen wenigstens wie $\frac{1}{r}$, so fällt das Oberflächenintegral in (7) fort, und wir haben

$$V_p = -\int \frac{\Delta V}{4\pi r}\, dS. \tag{8}$$

Liegt nun die Poissonsche Gleichung

$$\Delta V = -\varrho \tag{9}$$

vor, wo ϱ eine gegebene Ortsfunktion ist, so haben wir eine Lösung

$$V_p = \int \frac{\varrho}{4\pi r}\, dS. \tag{10}$$

Hier bedeutet, um es noch einmal hervorzuheben, ϱ die Ortsfunktion in dem variablen Punkte des Integrationsgebietes S,

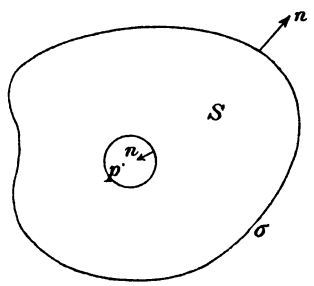


Fig. 28a.

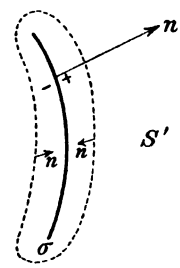


Fig. 28b.

r den Abstand dieses variablen Punktes vom festen Punkte p, dann ist V in p durch (10) bestimmt. Bei der Ausführung der partiellen Integrationen, durch welche die Flächenintegrale in (4) auftreten, ist bis jetzt stillschweigend die Stetigkeit von V und seinen ersten Differentialquotienten vorausgesetzt. Ist an bestimmten Flächen σ $\frac{\partial V}{\partial n}$ unstetig, so müssen auch diese Flächen ausgeschaltet und ihre beiden Seiten mit zur Begrenzung von S' gerechnet werden (cf. Fig. 28b). Die positive Normale ist, wie immer, die äußere Normale am Raume S', weist also auf die ausgeschaltete Fläche σ hin.

Da V stetig ist, gibt das Integral $\int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma$ in (4) keinen Beitrag, wohl aber $\int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma$, genommen über die in Fig. 28b

punktierte Fläche. Führen wir eine Normale n an σ ein, so fällt die äußere Normale rechts von σ mit $-n$, links mit $+n$ zusammen, und man erhält, da man die punktierte Fläche um σ zusammenziehen kann,

$$-\int \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{+}-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{-}\right\} d\sigma.$$

Jetzt folgt aus (6)

$$V_p=-\int \frac{\Delta V}{4\pi r} dS-\int \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{+}-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{-}\right\} d\sigma. \tag{8'}$$

Ist auf σ

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{+}-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^{-}=-\varrho_\sigma, \tag{9'}$$

so wird wegen (9) und (9')

$$V_p=\int \frac{\varrho}{4\pi r} dS+\int \frac{\varrho_\sigma}{4\pi r} d\sigma. \tag{10'}$$

Genau analoge Betrachtungen können wir an die Gleichung

$$\Delta U+k^2 U=0 \tag{11}$$

anknüpfen, die in der Theorie der Wellen von Wichtigkeit ist.

Suchen wir ein Integral, welches von ϑ und φ unabhängig ist, so schreibt sich (11)

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr^2\frac{dU}{dr}}{dr}+k^2 U=0 \tag{12}$$

oder

$$\frac{1}{r}\frac{d^2 rU}{dr^2}+k^2 U=0, \tag{12'}$$

da die ersten Terme von (12) und (12') identisch sind. Setzen wir für den Augenblick $rU=W$, so lautet (12')

$$\frac{d^2 W}{dr^2}+k^2 W=0, \tag{12''}$$

also ist

$$W=e^{\pm ikr},$$

wie sich durch Differentiation sofort bestätigen läßt, oder

$$U=\frac{e^{\pm ikr}}{r} \tag{13}$$

ein partikulares Integral von (11).

Setzen wir in (3) für U den Wert aus (13) ein, nachdem wir wieder um p eine Kugel konstruiert haben, so ergibt sich

$$\int \frac{e^{\pm ikr}}{r}(\Delta V + k^2 V)\,dS' = \int\left(\frac{e^{\pm ikr}}{r}\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial \frac{e^{\pm ikr}}{r}}{\partial r}\right)d\sigma$$

$$+\int\left(V\frac{\partial \frac{e^{\pm ika}}{a}}{\partial a} - \frac{e^{\pm ika}}{a}\frac{\partial V}{\partial a}\right)a^2 d\omega. \qquad (14)$$

Wir ziehen die Kugel wieder in den Punkt p zusammen und lassen die Fläche σ ins Unendliche rücken, wo das Oberflächenintegral verschwindet, da V dort wie $\frac{1}{r}$ verschwinden soll. Dann ist

$$4\pi V_p = -\int \frac{e^{\pm ikr}}{r}(\Delta V + k^2 V)\,dS. \qquad (15)$$

Liegt die Gleichung

$$\Delta V + k^2 V = -\varrho \qquad (16)$$

vor, wo ϱ gegebene Ortsfunktion ist, so ergibt (15) eine Lösung

$$V_p = \int \frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}\varrho \cdot dS. \qquad (17)$$

Dieses Resultat werden wir später gebrauchen.

§ 4.

Zerlegung eines Vektors in einen Potentialvektor und einen solenoidalen Vektor.

Wir hatten Kapitel II § 5 gesehen, daß ein Vektor eindeutig gegeben ist, wenn seine Divergenz, seine Rotation gegeben sind und er im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet. Jetzt handelt es sich darum, diesen Vektor selbst zu finden.

Es sei also

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = \varrho \qquad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A} = \mathfrak{F}. \qquad (2)$$

Aus (2) folgt mit Hilfe von (1), daß die Bedingung bestehen muß

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = 0. \qquad (2')$$

ϱ und $\mathfrak{J}$ sind gegebene Größen, und zwar ϱ ein Skalar, $\mathfrak{J}$ ein Vektor. Wir zerlegen $\mathfrak{A}$ in die Summe

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \tag{3}$$

und bestimmen $\mathfrak{A}$ durch Dekomposition so, daß

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathfrak{A}_1 = \varrho \ \text{(a)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{A}_1 = 0 \ \text{(b)} \\ &\operatorname{div} \mathfrak{A}_2 = 0 \ \text{(c)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{J} \ \text{(d)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Finden wir Lösungen für $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, die der Unendlichkeitsbedingung genügen, so sind es die einzigen existierenden Lösungen, da wir ja den Eindeutigkeitsbeweis erbracht haben.

$\mathfrak{A}_1$ ist ein Potentialvektor, $\mathfrak{A}_2$ ein solenoidaler Vektor. Wir bestimmen zunächst $\mathfrak{A}_1$.

Wegen (4b) können wir unter Berücksichtigung von Kapitel II § 4, 3 setzen

$$\mathfrak{A}_1 = -\operatorname{grad} U. \tag{5}$$

Also ergibt sich aus (4a) wegen (n)

$$\Delta U = -\varrho. \tag{6}$$

Ein Integral lautet nach § 3 (10):

$$U = \int \frac{\varrho}{4\pi r} dS, \tag{7}$$

also

$$\mathfrak{A}_1 = -\operatorname{grad}_p \int \frac{\varrho}{4\pi r} dS. \tag{8}$$

Hier bedeutet grad_p die Differentiation nach den Koordinaten von p (x, y, z), die in r vorkommen, während in ϱ nur die Koordinaten des variablen Punktes p' $(x'y'z')$ in S enthalten sind.

U wird das skalare Potential genannt.

Um $\mathfrak{A}_2$ zu finden, setzen wir

$$\mathfrak{A}_2 = \operatorname{rot} \mathfrak{B}, \tag{9}$$

wo $\mathfrak{B}$ ein neuer Vektor ist; dies ist erlaubt, weil $\operatorname{div} \mathfrak{A}_2 = 0$ ist wegen (4c). Dann wird wegen (4d)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{B} = \mathfrak{J} \tag{10}$$

oder wegen (o)

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{B} - \Delta \mathfrak{B} = \mathfrak{J}. \tag{11}$$

Diese Gleichung wird am einfachsten, wenn

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \tag{12}$$

wird.[1]) Dann lautet sie

$$\Delta \mathfrak{B} = -\mathfrak{J} \tag{13}$$

und

$$\mathfrak{B} = \int \frac{\mathfrak{J}}{4\pi r}\, dS \tag{14}$$

wegen § 3 (10).

Weisen wir noch nach, daß die div von (14) Null ist, so ist $\mathfrak{B}$ eine Lösung von (11).

Es ist nach (14)

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}_p\left(\frac{\mathfrak{J}}{r}\right) dS = \frac{1}{4\pi}\int \left(\mathfrak{J} \cdot \operatorname{grad}_p \frac{1}{r}\right) dS; \tag{15}$$

denn $\mathfrak{J}$ ist nicht von x, y, z, sondern nur von x', y', z' abhängig.

Nun ist

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

also

$$\operatorname{grad}_p \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_{p'} \frac{1}{r}.$$

Es folgt

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = -\frac{1}{4\pi}\int \left(\mathfrak{J} \cdot \operatorname{grad}_{p'} \frac{1}{r}\right) dS; \tag{16}$$

(s) ergibt

$$\left(\mathfrak{J} \operatorname{grad}_{p'} \frac{1}{r}\right) = \operatorname{div}_{p'} \frac{\mathfrak{J}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{div}_{p'} \mathfrak{J}. \tag{17}$$

Substitution von (17) in (16) und Anwendung des Gaußschen Satzes liefert

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathfrak{J}_n}{r}\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{J}}{r}\, dS. \tag{18}$$

Da $\mathfrak{A}$ im Unendlichen verschwinden soll wie $\frac{1}{r^2}$, so verschwindet $\mathfrak{J} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$ dort wie $\frac{1}{r^3}$, ferner gilt (2′), also ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \tag{19}$$

---

1) Denken wir uns für den Augenblick $\mathfrak{A}_2$ gegeben, so ist durch (9) $\mathfrak{B}$ nur bis auf einen additiven Gradienten bestimmt wegen (m); durch (12) ist dieser Gradient dann näher bestimmt.

$\mathfrak{B}$ wird Vektorpotential genannt wegen der Analogie von (7) und (14). (9) ergibt

$$\mathfrak{A}_2 = \mathrm{rot}_p \int \frac{\mathfrak{J}}{4\pi r} dS, \tag{20}$$

(8) und (20) ergeben mit Hilfe von (1) und (2)

$$\mathfrak{A} = -\mathrm{grad}_p \int \frac{\mathrm{div}_{p'} \mathfrak{A}}{4\pi r} dS + \mathrm{rot}_p \int \frac{\mathrm{rot}_{p'} \mathfrak{A}}{4\pi r} dS. \tag{21}$$

Da infolge des Eindeutigkeitsbeweises nur eine Lösung für $\mathfrak{A}$ möglich ist, stellt (21) die Lösung dar.

Diese Betrachtungen sind z. B. wichtig für die Theorie des Magnetismus; die magnetischen Kraftlinien haben z. T. Endpunkte (durch permanenten Magnetismus erzeugt), z. T. verlaufen sie in geschlossenen Bahnen (durch stationäre Ströme erzeugt). (21) sagt aus, daß die Teilfelder des permanenten Magnetismus und der elektrischen Ströme sich einfach superponieren.

§ 5.

Mechanische Deformationen.

Um uns ein Bild von der kinematischen Bedeutung der betrachteten Vektoren zu machen, wollen wir zunächst die Bewegung eines starren Körpers betrachten.

Diese bestehe in einer Rotation um eine Achse mit der momentanen Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$. Wir können dieselbe als Vektor darstellen, dessen Richtung mit der Richtung der Drehachse zusammenfällt, und dessen Betrag $|\mathfrak{w}|$ ist.

Vom Anfangspunkt O des Vektors $\mathfrak{w}$ ziehen wir den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ nach einem beliebigen Punkte p, dann ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in p

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}];$$

denn die Richtung von $\mathfrak{v}$ ist senkrecht zur Ebene, die durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{w}$ gebildet wird, und der absolute Wert ist $|\mathfrak{w}| \cdot |\mathfrak{r}| \sin(\mathfrak{w}, \mathfrak{r}) = |\mathfrak{w}| \cdot \varrho$ (cf. Fig. 29, S. 63), wo ϱ den Abstand des Punktes p von der Drehachse bedeutet.

Hat der Körper außerdem noch eine translatorische Bewegung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$, so ist

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}]. \tag{2}$$

Um die Rotationsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ durch die Weggeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auszudrücken, bilden wir die rot von (2), dann ergibt sich, da $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{w}$ räumlich konstant sind:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \operatorname{rot} [\mathfrak{w}, \mathfrak{r}]. \tag{3}$$

Wegen (q) folgt:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{r} - (\mathfrak{w} \operatorname{grad}) \mathfrak{r}. \tag{4}$$

Ist O der Koordinatenanfang eines kartesischen Systems, so hat $\mathfrak{r}$ die Komponenten x, y, z, also ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{r} = 3$$

und

$$(\mathfrak{w} \operatorname{grad}) \mathfrak{r} = \mathfrak{w};$$

folglich ist

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 2\mathfrak{w}. \tag{5}$$

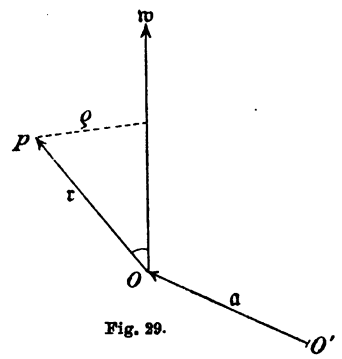


Fig. 29.

Die rot der Weggeschwindigkeit ist gleich der doppelten Drehgeschwindigkeit.

Daher erklärt sich der Name Rotation für die Vektoroperation.

Um eine interessante kinematische Beziehung abzuleiten, zerlegen wir die konstante Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ in zwei Komponenten parallel und senkrecht zu $\mathfrak{w}$, dann ist

$$\mathfrak{v}_0 = [\mathfrak{w}, \mathfrak{a}] + b \cdot \mathfrak{w}, \tag{6}$$

wo $\mathfrak{a}$ ein neuer Vektor, b ein Skalar ist; denn $[\mathfrak{w}, \mathfrak{a}]$ ist $\perp \mathfrak{w}$ und $(b\mathfrak{w})$ ist $\parallel \mathfrak{w}$. $\mathfrak{a}$ und b sind durch $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{w}$ eindeutig bestimmt, denn durch skalare Multiplikation von (6) mit $\mathfrak{w}$ erhalten wir

$$b = \frac{(\mathfrak{v}_o, \mathfrak{w})}{\mathfrak{w}^2} \tag{7}$$

oder

$$b = \frac{|\mathfrak{v}_o|}{|\mathfrak{w}|} \cos(\mathfrak{v}_o, \mathfrak{w}). \tag{7'}$$

Quadrierung von (6) ergibt

$$\mathfrak{v}_o^2 = [\mathfrak{w}, \mathfrak{a}]^2 + b^2 \cdot \mathfrak{w}^2 = [\mathfrak{w}, \mathfrak{a}]^2 + \frac{(\mathfrak{v}_o, \mathfrak{w})^2}{\mathfrak{w}^2}. \tag{8}$$

Das doppelte Produkt fällt wegen (g) fort.

Da nun $\mathfrak{a}$, wie sich aus einer Zeichnung leicht ergibt, senkrecht zu $\mathfrak{w}$ und zu $\mathfrak{v}_o$ steht, so ist

$$[\mathfrak{w}, \mathfrak{a}]^2 = \mathfrak{w}^2 \cdot \mathfrak{a}^2,$$

also

$$|\mathfrak{a}| = \frac{|\mathfrak{v}_o|}{|\mathfrak{w}|} \sin(\mathfrak{v}_o, \mathfrak{w}). \tag{9}$$

So ist Richtung und Betrag von $\mathfrak{a}$ festgelegt.

Aus (2) wird wegen (6)

$$\mathfrak{v} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{a} + \mathfrak{r}] + b\mathfrak{w}. \tag{10}$$

Der erste Term rechts ist aber eine Drehung mit der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ um eine zu $\mathfrak{w}$ parallele Achse durch einen Punkt O', den man erhält, wenn man in O den Vektor $-\mathfrak{a} = OO'$ abträgt (cf. Fig. 29).

Die momentane Bewegung eines starren Körpers läßt sich also im allgemeinsten Falle als Drehung um eine Achse und Translation in Richtung dieser Achse, d. h. als Schraubung, darstellen.

Ist ferner ein Vektor $\mathfrak{v}$ als Geschwindigkeitsvektor gegeben, dessen div nicht verschwindet, während seine rot Null ist, so wissen wir aus dem Vorigen, daß die Teilchen nicht rotieren. Nun stellt aber $\int \mathfrak{v}_n d\sigma$ das Volumen Materie dar, welches mehr aus dem Raum S in der Zeiteinheit herauskommt als hineingeht, es müssen also Dilatationen der Materie stattfinden, und da nach dem Gaußschen Satze

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{v}\, dS = \int \mathfrak{v}_n\, d\sigma$$

ist, so bedeutet div $\mathfrak{v}$ die Volumdilatation der Volumeneinheit, wir haben es also mit einer Dehnung zu tun.

Im vorigen Paragraphen sahen wir nun, daß wir jeden Vektor $\mathfrak{v}$ zusammensetzen können aus einem Potentialvektor und einem solenoidalen Vektor. Die kinematische Bedeutung ist die, daß wir eine beliebige Verschiebung in jedem Moment auffassen können als zusammengesetzt aus der Verschiebung eines starren Körpers (einer Schraubung) und einer Dehnung jeden Volumelements.

Kapitel IV.

Anwendungen aus der Hydrodynamik und der Elektrodynamik.

§ 1.

Die Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik.

Wir leiten zunächst die Kontinuitätsgleichung für die Flüssigkeit ab, d. h. den Ausdruck dafür, daß die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit in einem Raume S hinzugekommen ist, in dieser Zeit durch die Oberfläche σ von S hineingekommen sein muß.

Bezeichnet ϱ die Dichte, so ist $\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} dS$ die in der Zeiteinheit hinzugekommene Flüssigkeitsmenge, anderseits tritt in der Zeiteinheit durch das Element $d\sigma$ das Volum $-\mathfrak{v}_n d\sigma$ hinein, wenn $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit, n die äußere Normale bedeutet; also durch die ganze Oberfläche die Masse $-\int \varrho \mathfrak{v}_n d\sigma$, und es ergibt sich

$$\int \frac{\partial \varrho}{\partial t} dS = -\int \varrho \mathfrak{v}_n d\sigma. \tag{1}$$

Nach dem Gaußschen Satz folgt aus (1)

$$\int \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathfrak{v} \right) dS = 0, \tag{2}$$

und da der Raum beliebig ist, muß der Integrand Null sein, also

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho \mathfrak{v} = 0. \tag{3}$$

Dies ist aber nach (s)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\mathfrak{v}, \operatorname{grad} \varrho) + \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \tag{4}$$

oder wegen Kapitel II § 7 (2)

$$\frac{d\varrho}{dt} + \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0. \tag{5}$$

(3) oder (5) heißt die Kontinuitätsgleichung.

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so ist $\frac{d\varrho}{dt} = 0$, daraus folgt die Inkompressibilitätsbedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0, \tag{6}$$

was wir auch schon aus dem letzten Paragraphen des vorigen Kapitels hätten schließen können, denn dort ergab sich div $\mathfrak{v}$ als Dilatation der Volumeinheit.

Wir kommen zu den Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik: Wirkt an einer Stelle einer Flüssigkeit ein Druck p, so ist die Kraft auf den Querschnitt q gleich pq. Betrachten wir einen Zylinder von der Basisfläche q und der Höhe dl, so wirkt in Richtung der wachsenden l auf die eine Basisfläche die Kraft $p \cdot q$, auf die gegenüberliegende Basisfläche wirkt nach abnehmenden l die Kraft $(p)_{l+dl} \cdot q$, im ganzen also auf das Volum $q\,dl$ die Kraft $-\frac{\partial p}{\partial l} q \cdot dl$, also auf die Volumeinheit die Kraft $-\operatorname{grad} p$, oder auf die Masseneinheit die Kraft $-\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p$.

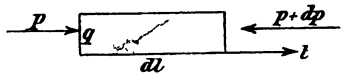


Fig. 30.

Hierzu komme noch die äußere Kraft $\mathfrak{f}$ pro Masseneinheit, dann lauten die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p \tag{7}$$

oder wegen Kapitel II § 7 (2)

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v} \operatorname{grad}) \mathfrak{v} = \mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p. \tag{8}$$

Dies sind die Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik.

§ 2.

Die Helmholtzschen Wirbelsätze.

Setzen wir in (r)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{v},$$

so wird

$$(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{v} = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}]. \tag{1}$$

Aus § 1 (8) wird

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}] = \mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p. \tag{2}$$

Wir setzen jetzt die Flüssigkeit als inkompressibel, also $\varrho = \text{const}$ voraus, bilden die rot von (2) und beachten (m); ferner setzen wir die Rotationsgeschwindigkeit der Flüssigkeit nach Kapitel III § 5·(5)

$$\mathfrak{w} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}. \tag{3}$$

Dann wird

$$2\,\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} - 2\,\mathrm{rot}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}] = \mathrm{rot}\,\mathfrak{f}. \tag{4}$$

Wegen (3) wird

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{w} = 0. \tag{5}$$

Nehmen wir von der Vektorgleichung (4) die Normalkomponente irgendeiner im Raume festliegenden Fläche σ und integrieren über dieselbe, und wenden rechts den Stokesschen Satz an, so wird

$$\int_\sigma \left\{\frac{\partial \mathfrak{w}_n}{\partial t} - \mathrm{rot}_n\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{w}]\right\} d\sigma = \frac{1}{2}\int_s \mathfrak{f}\,d\mathfrak{s}. \tag{6}$$

Die linke Seite ist aber nach Kapitel II § 7 (3) und mit Berücksichtigung von (5) $\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathfrak{w}_n\,d\sigma$, also folgt

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \mathfrak{w}_n\,d\sigma = \frac{1}{2}\int_s \mathfrak{f}\,d\mathfrak{s}. \tag{7}$$

Hat die Kraft $\mathfrak{f}$ ein einwertiges Potential, haben wir also eine konservative äußere Kraft, so verschwindet die rechte Seite und wir haben

$$\int_\sigma \mathfrak{w}_n \, d\sigma = \text{const.} \qquad \text{Siehe (3)} \qquad (8)$$

Dieses Flächenintegral heißt das Wirbelmoment, und wir haben den wichtigen von Helmholtz gefundenen Satz:

Bewegt sich eine Flüssigkeit unter dem Einfluß konservativer Kräfte, so bleibt das Wirbelmoment einer durch dieselben Flüssigkeitsteilchen gehenden Fläche zeitlich konstant.

Wegen (3) folgt aus (8) mit Hilfe des Stockesschen Satzes

$$\int_\mathfrak{s} \mathfrak{v} \, d\mathfrak{s} = \text{const.} \qquad (9)$$

Legen wir durch die Punkte eines Linienelements dl die $\mathfrak{w}$-Linien, so erhalten wir einen Flächenstreifen, für dessen Punkte $\mathfrak{w}_n = 0$ ist; da für diese Materieteilchen $\mathfrak{w}_n = 0$ bleibt, so bedeutet das: Die Flüssigkeitsteilchen einer $\mathfrak{w}$-Linie (Wirbellinie) bleiben während der Bewegung auf einer Wirbellinie.

Durch alle Punkte der Begrenzung einer beliebigen Fläche lege man die Wirbellinien; diese bilden einen sogenannten Wirbelkanal, und jeder Querschnitt hat dasselbe Wirbelmoment (weil div $\mathfrak{w} = 0$). Daraus folgt: Die Flüssigkeitsmasse, die zu einer bestimmten Zeit einen Wirbelkanal erfüllt, bildet auch im Laufe der Bewegung einen Wirbelkanal von zeitlich unveränderlichem Moment.

War zu einer bestimmten Zeit die Flüssigkeit wirbelfrei, d. h. $\mathfrak{w} = 0$, so bleibt es wegen (8) $= 0$ oder

$$\int_\mathfrak{s} \mathfrak{v} \, d\mathfrak{s} = 0 \qquad (9')$$

oder

$$\mathfrak{v} = \text{grad } U. \qquad (10)$$

U heißt das Geschwindigkeitspotential. Dann geht die Inkompressibilitätsbedingung über in

$$\Delta U = 0. \qquad (11)$$

§ 3.

Elektrolytische Verschiebungen.

Für Gase gilt die Zustandsgleichung

$$pv = RT, \tag{1}$$

wo p den Druck, v das Volumen eines Grammolekül, T die absolute Temperatur, R eine universelle Konstante bedeutet.

Dieselbe Gleichung gilt auch nach van t'Hoff für verdünnte Lösungen. p bedeutet dann den osmotischen Druck, v das Volumen Lösungsmittel, in dem ein Grammäquivalent aufgelöst ist. Es ist also

$$v = \frac{1}{N}, \tag{2}$$

wenn N die Zahl Grammäquivalente in der Volumeinheit bedeutet.

Die (osmotische) Kraft auf die Volumeinheit ist nach § 2, wenn der Druck p ist, $-\operatorname{grad} p$; es folgt aus (1) und (2)

$$-\operatorname{grad} p = -RT \operatorname{grad} N. \tag{3}$$

T soll konstant sein. In der Volumeinheit sind aber N Grammäquivalente, also ist die Kraft auf ein Grammäquivalent

$$\frac{-RT}{N} \operatorname{grad} N \text{ oder } -RT \operatorname{grad} lg\, N.$$

Dazu kommt die elektrische Kraft auf die elektrisch geladenen Teilchen. Habe das Grammäquivalent die Ladung e, und sei das Potential des elektrischen Feldes Φ, so ist das Potentialgefälle $-\operatorname{grad} \Phi$ und die elektrische Kraft auf ein Grammäquivalent ist

$$-e \operatorname{grad} \Phi,$$

so daß die Gesamtkraft auf ein Grammäquivalent ist

$$\mathfrak{f} = -\frac{RT}{N} \operatorname{grad} N - e \operatorname{grad} \Phi. \tag{5}$$

Bei starker Reibung tritt nun, wie in der Mechanik gezeigt wird, im stationären Endzustand eine Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ein, die Geschwindigkeit ist der wirkenden Kraft proportional, der Proportionalitätsfaktor u heißt Beweglichkeit.

Also ist

$$v = u\mathfrak{f} = -u\left(\frac{RT}{N}\operatorname{grad} N + e\operatorname{grad}\Phi\right). \tag{6}$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet nun, wie aus § 1 folgt

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathfrak{v}N) = 0. \tag{7}$$

Wir beschränken uns auf binäre, einwertige Elektrolyte, d. h. ein elektrisch neutrales Molekül zerfällt in ein positives und ein negatives Jon. Den positiven Jonen geben wir den Index 1, den negativen den Index 2. Da nun $e_1 = -e_2 = e$ ist, so ist die Bedingung dafür, daß jedes Volumelement elektrisch neutral ist

$$N_1 = N_2 = N. \tag{8}$$

Aus (6), (7), (8) folgt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N}{\partial t} - u_1 RT \operatorname{div}\operatorname{grad} N - u_1 e \operatorname{div}(N \operatorname{grad}\Phi) = 0 \\ &\frac{\partial N}{\partial t} - u_2 RT \operatorname{div}\operatorname{grad} N + u_2 e \operatorname{div}(N \operatorname{grad}\Phi) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Multiplikation der ersten Gleichung (9) mit u_2, der zweiten mit u_1 und Addition ergibt mit Berücksichtigung von (n)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 2RT\frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2}\Delta N. \tag{10}$$

Durch diese Differentialgleichung wird die Veränderung der Konzentration N mit der Zeit, die Diffusion, bestimmt.

Nernst hat gezeigt, daß der durch die elektrisch gemessenen Jonenbeweglichkeiten u, die Gaskonstante R und die absolute Temperatur T berechnete Diffusionskoeffizient

$$D = 2RT\frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2} \tag{11}$$

mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Subtrahieren wir beide Gleichungen (9) voneinander, so ergibt sich:

$$\operatorname{div}\{(u_1 - u_2)RT\operatorname{grad} N + (u_1 + u_2)eN\operatorname{grad}\Phi\} = 0. \tag{12}$$

Integration ergibt

$$(u_1 - u_2)\,RT\,\text{grad}\,N + (u_1 + u_2)\,eN\,\text{grad}\,\Phi = \text{rot}\,\mathfrak{A}, \quad (13)$$

wo $\mathfrak{A}$ ein willkürlicher (Integrations-)Vektor ist.

Nun wollen wir annehmen, daß das Potentialgefälle nur hervorgerufen sein soll durch die örtlich variable Konzentration N. Ist also N konstant, so soll auch Φ konstant sein, daraus folgt rot $\mathfrak{A} = 0$ und

$$(u_1 - u_2)\,RT\,\text{grad}\,N + (u_1 + u_2)\,eN\,\text{grad}\,\Phi = 0. \quad (13')$$

Division durch $(u_1 + u_2)\,Ne$ ergibt

$$\text{grad}\,\Phi = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}\,\frac{RT}{e}\,\text{grad}\,lg\,N. \quad (14)$$

Integrieren wir von einer Stelle der Flüssigkeit, wo Konzentration und Potential die Werte N, Φ haben, bis zu einer Stelle, wo diese Größen N', Φ' sind, so wird

$$\Phi' - \Phi = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}\,\frac{RT}{e}\,lg\,\frac{N'}{N}. \quad (15)$$

Das ist die Nernstsche Formel, sie ergibt die Potentialdifferenz in einer Lösung infolge von Konzentrationsverschiedenheiten.

Wie Nernst selbst und andere gezeigt haben, stimmt auch hier die Theorie mit der Erfahrung gut überein.

§ 4.

Die Maxwellschen Gleichungen.

Wir wollen die Maxwellschen Gleichungen der Elektrizitätstheorie aus zwei einfachen Gesetzen, dem Biot-Savartschen Gesetze und dem Induktionsgesetze verallgemeinern. Daß diese Verallgemeinerungen nicht den Wert einer Ableitung haben, ist selbstverständlich, sie sollen die Gleichungen nur plausibel machen.

Wir beobachten, daß das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ eines geradlinigen, linearen Stromes i diesen in Kreisen umzingelt, und zwar sind die Kreisebenen senkrecht zu i, und eine Vorwärtsbewegung in der Richtung von $\mathfrak{H}$ und zugleich von i entspricht der Korkzieherregel.

Die Feldstärke $\mathfrak{H}$, d. i. die Kraft auf die magnetische Menge 1, ist proportional i. Ferner beobachten wir, daß, wenn wir einen Stabmagneten senkrecht zu i und $\mathfrak{H}$, also radial, aufhängen, und zwar frei drehbar um den Schnittpunkt O der verlängerten Magnetachse mit der Strombahn, dann kein Drehmoment vorhanden ist.

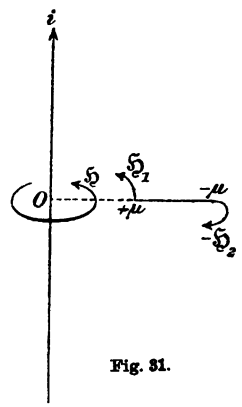


Fig. 31.

Liegt der positive Pol der Stärke $+\mu$ im Abstande ϱ_1 von O, der negative $(-\mu)$ im Abstande ϱ_2, so ist das Drehmoment um i

$$\mathfrak{M} = \mu\mathfrak{H}_1\varrho_1 - \mu\mathfrak{H}_2\varrho_2 = 0. \qquad (1)$$

Es folgt also

$$\mathfrak{H}_1 : \mathfrak{H}_2 = \varrho_2 : \varrho_1, \qquad (2)$$

also können wir setzen

$$\mathfrak{H} = \frac{\alpha i}{\varrho}, \qquad (3)$$

wo α eine willkürliche Konstante ist, der wir den Wert

$$\alpha = \frac{1}{2\pi c} \qquad (4)$$

geben wollen, wenn c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bedeutet. Durch Festlegung dieser Konstanten beziehen wir die Einheit von i auf die von $\mathfrak{H}$.

Wir haben also

$$\mathfrak{H} = \frac{i}{2\pi c\varrho}. \qquad (5)$$

Bilden wir die Arbeit, welche die magnetischen Kräfte leisten, wenn man einen magnetischen Einheitspol um i herumführt, so ergibt sich

$$A = \int_{\mathfrak{S}} \mathfrak{H} d\mathfrak{s}. \qquad (6)$$

Da aber $\mathfrak{H}$ immer tangential gerichtet ist, gibt die Projektion von $d\mathfrak{s}$ auf die Richtung von $\mathfrak{H}$ $\varrho d\varphi$, wenn φ den Winkel gegen eine feste Ebene durch i bedeutet, also ist

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{i}{2\pi c\varrho}\varrho d\varphi = \frac{i}{c}. \qquad (7)$$

Der Leitungsstrom i ist die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt geflossene Elektrizitätsmenge nach den älteren (und neuesten) Anschauungen der Elektrizität.

Ist die elektrische Kraft (das Potentialgefälle) $\mathfrak{E}$, so ist die Potentialdifferenz V zwischen zwei Punkten der Strombahn vom gegenseitigen Abstande l

$$V = \mathfrak{E} \cdot l. \tag{8}$$

Nach dem Ohmschen Gesetz ist aber

$$i = \frac{V}{w}, \tag{9}$$

wo w den Widerstand bedeutet. Ist λ die Leitfähigkeit, σ der Drahtquerschnitt, so ist

$$w = \frac{l}{\sigma\lambda}, \tag{10}$$

also

$$i = \mathfrak{E}\lambda\sigma. \tag{11}$$

Ist $\mathfrak{E}$ oder λ nicht konstant über den Querschnitt, so geht (11) über in

$$i = \int \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma, \tag{12}$$

und (6), (7), (12) ergeben

$$c \int_s \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \int \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma. \tag{13}$$

Dieser Formel schreiben wir Allgemeingültigkeit für stationäre Vorgänge zu. Es soll dann $d\mathfrak{s}$ das Element einer beliebigen geschlossenen Kurve, σ eine willkürliche Fläche bedeuten, deren Randkurve s ist.

Haben wir es mit nicht-stationären Zuständen zu tun, so stellt (12) nicht mehr die in der Zeiteinheit durch σ hindurchgeflossene Elektrizitätsmenge dar, sondern nur einen Teil derselben.

Unter einem Dielektrikum stellen wir uns nämlich folgendes vor: In jeder Volumeinheit sind N Teilchen (Elektronen), die je die Elektrizitätsmenge e besitzen, und ebensoviele mit der Elektrizitätsmenge $-e$. Jedes Teilchen hat eine Gleich-

gewichtslage. Bringt man es aus dieser heraus, so wird es in dieselbe zurückgezogen mit einer (elastischen) Kraft, die der Verschiebung $\mathfrak{l}$ aus der Gleichgewichtslage proportional ist. Ist die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ (d.h. die Kraft auf die Elektrizitätsmenge 1) variabel, so ist die durch die Zunahme der elektrischen Feldstärke $d\mathfrak{E}$ hervorgerufene Verschiebung aus der Gleichgewichtslage

$$d\mathfrak{l} = \beta e d\mathfrak{E}, \tag{14}$$

wo β eine Konstante ist.

Durch eine Fläche σ gehen also alle die Elektronen hindurch, welche in dem schiefen Zylinder mit der Grundfläche $d\sigma$ und der Erzeugenden $d\mathfrak{l}$ enthalten sind. Dies sind aber $N \cdot d\mathfrak{l}_n \cdot d\sigma$, also ist die hindurchgebrachte Elektrizitätsmenge bei einer Feldsteigerung von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E} + d\mathfrak{E}$

$$eN d\mathfrak{l}_n d\sigma = \beta e^2 N d\mathfrak{E}_n d\sigma. \tag{15}$$

In der Zeiteinheit geht also die Elektrizitätsmenge

$$\beta e^2 N \frac{\partial \mathfrak{E}_n}{\partial t} d\sigma \tag{16}$$

durch $d\sigma$ hindurch.

Summieren wir nun über die positiven und negativen Elektronen, so ergibt sich

$$\Sigma \beta e^2 N \frac{\partial \mathfrak{E}_n}{\partial t} d\sigma.$$

Wir setzen

$$\Sigma \beta e^2 N = \varepsilon \tag{17}$$

und nennen ε die Dielektrizitätskonstante des Mediums. Es kommt also zu $\int \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma$ noch hinzu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma$$

und wir haben die Gleichung

$$c \int_s \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_\sigma \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma + \int_\sigma \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma. \tag{18}$$

$\lambda \mathfrak{E} = \mathfrak{J}$ heißt der Leitungsstrom, $\frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$ der Verschiebungsstrom, $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ die elektrische Erregung.

(18) ist die erste Maxwellsche Gleichung. Ihr schreiben wir Allgemeingültigkeit für ruhende Medien zu.

Die zweite Maxwellsche Gleichung ist eine Erweiterung des Faradayschen Induktionsgesetzes.

In einem geschlossenen linearen Leiter s wird ein Strom erzeugt, wenn die Anzahl $\mathfrak{H}$-Linien sich verändern, die durch eine beliebige Fläche σ, welche s zur Randkurve hat, hindurchgehen, und zwar ist die elektromotorische Kraft proportional der Änderungsgeschwindigkeit der $\mathfrak{H}$-Linienzahl.

Nun ist diese Zahl

$$\int \mathfrak{H}_n d\sigma,$$

also ihre Änderungsgeschwindigkeit

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{H}_n d\sigma.$$

Der Proportionalitätsfaktor ist nun aber von dem Material abhängig, welches an der Stelle von σ ist, wir setzen ihn $\frac{\mu}{c}$ und nennen μ die Permeabilität des Mediums. Ist die elektrische Feldstärke $\mathfrak{E}$ (das Potentialgefälle), so ist die gesamte elektromotorische Kraft $\int_s \mathfrak{E} d\mathfrak{s}$, und da einer Zunahme der $\mathfrak{H}$-Linienzahl eine elektromotorische Kraft in negativer s-Richtung entspricht, so ist

$$-c\int_s \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int \mu \mathfrak{H}_n d\sigma. \tag{19}$$

(19) ist die zweite Maxwellsche Gleichung. Wir schreiben ihr Allgemeingültigkeit in ruhenden Medien zu.

Die Anwendung des Stokesschen Satzes auf die linke Seite von (18) ergibt

$$c\int_\sigma \mathrm{rot}_n \mathfrak{H} d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma + \int_\sigma \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma, \tag{20}$$

und da diese Gleichung für jede beliebige Fläche σ gültig ist,

so muß sie auch für den Integranden selbst gelten. Es ist also

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial t} + \lambda \mathfrak{E}; \tag{21}$$

ebenso folgt aus (19)

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mu \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{22}$$

(21) und (22) stellen die Maxwellschen Gleichungen in der Differentialform dar, während (18) und (19) die Integralform sind.

Da in (18) und (19) überhaupt kein Koordinatensystem vorkommt, so ist die Unabhängigkeit der Maxwellschen Gleichungen vom Koordinatensystem als selbstverständlich erwiesen. Wir können natürlich die Gleichungen (21) und (22) in kartesischen Koordinaten schreiben. Sie lauten dann:

$$c\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}_x}{\partial t} + \lambda \mathfrak{E}_x \tag{23}$$

usw.

$$-c\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) = \frac{\partial \mu \mathfrak{H}_x}{\partial t} \tag{24}$$

usw.

Das „usw." soll die beiden anderen Gleichungen bedeuten, die durch zyklische Vertauschung von x, y, z entstehen. Ebensogut kann man diese Gleichungen auch in allgemeinen krummlinigen Koordinaten schreiben mit Anwendung von Kapitel III § 2 (10). (21) lautet dann

$$\frac{c}{e_2 e_3}\left(\frac{\partial e_3 \mathfrak{H}_{p_3}}{\partial p_2} - \frac{\partial e_2 \mathfrak{H}_{p_2}}{\partial p_3}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mathfrak{E}_{p_1} + \lambda \mathfrak{E}_{p_1} \tag{25}$$

usw.

§ 5.

Drei Integrale der Maxwellschen Gleichungen.

Wählen wir in (18) und (19) für σ eine geschlossene Fläche, so existiert keine Randkurve, die linken Seiten sind also Null, wir haben

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma + \int \lambda \mathfrak{E}_n d\sigma = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \mu \mathfrak{H}_n d\sigma = 0 \tag{2}$$

für geschlossene Flächen.

Verläuft in (1) die Fläche nur in Nichtleitern, so ist auf derselben überall $\lambda = 0$, also in diesem Falle

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma = 0. \tag{1'}$$

Die Integration ergibt

$$\int \varepsilon \mathfrak{E}_n d\sigma = e. \tag{3}$$

Die Integration von (2) gibt

$$\int \mu \mathfrak{H}_n d\sigma = m. \tag{4}$$

e und m sind Integrationskonstanten, wir nennen sie Elektrizitätsmenge resp. magnetische Menge.

(1') sagt aus: Die in einer nichtleitenden Fläche eingeschlossene Elektrizitätsmenge bleibt bei ruhenden Medien konstant.

(2) sagt aus: Die in einer Fläche eingeschlossene magnetische Menge bleibt bei ruhenden Medien konstant.

(1) bedeutet: Die Zunahme der Elektrizitätsmenge in einem Raumteile ist quantitativ gegeben durch die Einströmung durch die Oberfläche.

Wenden wir auf (3) und (4) den Gaußschen Satz an, und bezeichnen wir die Dichte der Elektrizität und des Magnetismus mit ϱ_e resp. ϱ_m, so wird

$$\int \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} \cdot dS = \int \varrho_e dS \tag{3'}$$

$$\int \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} \cdot dS = \int \varrho_m dS. \tag{4'}$$

Daraus folgt, da der Raum S beliebig ist,

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = \varrho_e \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = \varrho_m, \tag{6}$$

d. h. von jeder elektrischen (magnetischen) Menge 1 geht eine $\varepsilon\mathfrak{E}(\mu\mathfrak{H})$-Linie aus. Die Anwendung des Gaußschen Satzes auf (1) ergibt für den Fall, daß ε und λ örtlich konstant sind,

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0 \tag{7}$$

oder wegen (5)

$$\frac{\partial \varrho_e}{\partial t} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \varrho_e = 0. \tag{7'}$$

Die Integration liefert

$$\varrho_e = \varrho_{e0} e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon} t}. \tag{8}$$

ϱ_{e0} bedeutet die elektrische Dichte zur Zeit 0.

Die räumliche Dichte der Elektrizität klingt also auf Null ab. Da aber wegen (3) keine Elektrizität verloren gehen kann, so folgern wir, daß im Endzustand alle Elektrizität sich als Flächenladung vorfindet.

Um noch ein weiteres Integral der Maxwellschen Gleichungen zu bekommen, multiplizieren wir in § 4 (21) mit $\mathfrak{E}$, (22) mit $\mathfrak{H}$ skalar, addieren und integrieren über einen Raum S mit der Oberfläche σ. Es ergibt sich

$$c \int (\mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E}) dS = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2}{2} dS + \int \lambda \mathfrak{E}^2 dS. \tag{9}$$

Wegen (p) ist die linke Seite gleich

$$-c \int \operatorname{div} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}] dS$$

und nach dem Gaußschen Satze:

$$-c \int [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n d\sigma = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2}{2} dS + \int \lambda \mathfrak{E}^2 dS. \tag{10}$$

Nun ist der zweite Term der rechten Seite erfahrungsgemäß die in der Zeiteinheit entwickelte Wärme $\mathfrak{J}$ (Joulesche Wärme). Nehmen wir z. B. für den Raum ein vom Strom i

durchflossenes Drahtstück vom Querschnitt σ und der Länge l, so ist wegen § 4 (8), (9), (10)

$$\int \lambda \mathfrak{E}^2 dS = i^2 w \tag{11}$$

der bekannte Ausdruck für die Joulesche Wärme.

Führen wir einen neuen Vektor ein:

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}], \tag{12}$$

den sogenannten Poyntingschen Strahlungsvektor, so ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2}{2} dS + \mathfrak{J} + \int \mathfrak{S}_n d\sigma = 0. \tag{13}$$

Wählen wir für S den unendlichen Raum und verschwinden $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ (also $\mathfrak{S}$) stark genug im Unendlichen, so daß das Flächenintegral fortfällt, so haben wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2}{2} dS + \mathfrak{J} = 0, \tag{14}$$

also muß

$$\int \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2}{2} dS = W \tag{15}$$

die elektromagnetische Energie sein. (14) ist das Gesetz der Erhaltung der Energie: Die Abnahme der elektromagnetischen Energie ist gleich der entwickelten Jouleschen Wärme.

Ist S ein beliebiges Raumstück, so wollen wir (15) seine elektromagnetische Energie nennen, dann sagt (13) aus:

In einem beliebigen Raumstück nimmt die elektromagnetische Energie ab entsprechend der entwickelten Jouleschen Wärme und der durch die Oberfläche herausgetretenen Strahlung.

Haben wir ein Raumstück, an dessen Oberfläche $\mathfrak{S}$ keine Normalkomponente hat, und in dem keine Leiter sind, so ist

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0,$$

also

$$W = \text{const.} \tag{16}$$

Wir nennen

$$W_e = \int \frac{\varepsilon}{2} \mathfrak{E}^2 dS$$

und

$$W_m = \int \frac{\mu}{2} \mathfrak{H}^2 dS$$

die elektrische resp. magnetische Energie.

(3), (4) und (16) bilden Integrale der Maxwellschen Gleichungen. Sie sprechen die Gesetze von der Unzerstörbarkeit der elektrischen, resp. magnetischen Mengen und das Gesetz von der Erhaltung der Energie aus.

§ 6.

Die partiellen Differentialgleichungen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$.

Wir wollen aus den Maxwellschen Gleichungen

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \lambda \mathfrak{E} \tag{1}$$

$$- c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \tag{2}$$

Gleichungen gewinnen, die nur $\mathfrak{E}$ oder nur $\mathfrak{H}$ enthalten. Das Medium sei homogen, also ε, μ, λ vom Ort unabhängig. Bilden wir die rot von (1) und ersetzen rot $\mathfrak{E}$ durch (2), so ist

$$c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = - \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} - \frac{\lambda\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{3}$$

Wegen (o) ist dies

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} (\Delta \mathfrak{H} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{H}). \tag{4}$$

Bilden wir ebenso die rot von (2) und ersetzen rot $\mathfrak{H}$ durch (1), so folgt

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} (\Delta \mathfrak{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{E}). \tag{5}$$

Es liege ein Dielektrikum vor; die Dichten der Elektrizität und des Magnetismus seien zu einer bestimmten Zeit Null, dann bleiben sie Null wegen § 5 (7′), und für (4) und (5) erhält man die gemeinsame Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \Delta \mathfrak{A}, \tag{6}$$

wo $\mathfrak{A}$ entweder $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{H}$ bedeuten kann.

(6) ist die bekannte Wellengleichung, die aussagt, daß eine Störung elektromagnetischer Natur ($\mathfrak{A}$) sich mit der Geschwindigkeit $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ ausbreitet[1]); im Äther ist $\varepsilon = \mu = 1$; also ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit ω in einem beliebigen Körper

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

wenn $\omega_0 = c$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Äther ist. Nun ist aber der Brechungsexponent n der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω umgekehrt proportional und für den Äther gleich 1 gesetzt, also ist

$$n^2 = \varepsilon\mu \tag{7}$$

die Maxwellsche Beziehung zwischen den elektromagnetischen und optischen Eigenschaften.

§ 7.

Die Hertzschen Gleichungen für bewegte Medien.

Hertz hat die Maxwellschen Gleichungen für den Fall bewegter Medien erweitert, und zwar hat er die Maxwellschen Gleichungen in der Integralform beibehalten mit der Bestimmung, daß die in den Gleichungen auftretenden Flächen σ und Randkurven s in der Materie festliegen sollen und nicht etwa im Raume. Wir schreiben anstatt $\frac{\partial}{\partial t}$ also sinngemäß $\frac{d}{dt}$ und haben:

$$c\int \mathfrak{H}\, ds = \frac{d}{dt}\int \varepsilon\, \mathfrak{E}_n\, d\sigma + \int \lambda\, \mathfrak{E}_n\, d\sigma \tag{1}$$

$$-c\int \mathfrak{E}\, ds = \frac{d}{dt}\int \mu\, \mathfrak{H}_n\, d\sigma. \tag{2}$$

Wenden wir auf die nach der Zeit differenzierten Flächenintegrale Kap. II § 7 (3) an und auf die linken Seiten den

1) cf. H. Weber, Partielle Differentialgl. der math. Physik Bd. II S. 302.

Stokesschen Satz, so erhalten wir, wenn $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor der Materie ist,

$$\operatorname{rot}\{c\mathfrak{H} - [\varepsilon\mathfrak{E}, \mathfrak{v}]\} = \frac{\partial \varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E} + \lambda\mathfrak{E} \qquad (3)$$

$$-\operatorname{rot}\{c\mathfrak{E} + [\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{v}]\} = \frac{\partial \mu\mathfrak{H}}{\partial t} + \mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\mu\mathfrak{H}. \qquad (4)$$

Dies sind die **Hertzschen Gleichungen in der Differentialform.**

Nennen wir $c \operatorname{rot}\mathfrak{H}$ den Strom $\mathfrak{C}$ wie bei **Maxwell**, so setzt dieser sich zusammen aus folgenden Bestandteilen:

$\lambda\mathfrak{E} = \mathfrak{J}$, dem Leitungsstrom,

$\frac{\partial \varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}$, dem Verschiebungsstrom (von **Hertz** nachgewiesen),

$\mathfrak{v}\cdot\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}$, dem Konvektionsstrom (von **Rowland** nachgewiesen),

$\operatorname{rot}[\varepsilon\mathfrak{E}, \mathfrak{v}] = \mathfrak{R}$, dem Röntgenstrom (von Röntgen nachgewiesen).

Aus (1) und (2) erhält man für geschlossene Flächen wieder die Integrale, welche die Unzerstörbarkeit der elektrischen resp. magnetischen Mengen aussagen.

§ 8.

Die ponderomotorischen Kräfte der Maxwell-Hertzschen Theorie.

Wir multiplizieren § 7 (3) und (4) skalar mit $\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{v}]$ resp. mit $\mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\varepsilon\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{v}]$, formen die linke Seite um mit Hilfe von (p) und integrieren über einen Raum S, an dessen Oberfläche σ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ Null ist. Dann ergibt sich mit Anwendung des **Gaußschen** Satzes auf der linken Seite

$$-c\int\left[\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{v}], \mathfrak{H} - \frac{1}{c}[\varepsilon\mathfrak{E}, \mathfrak{v}]\right] d\sigma.$$

Berücksichtigen wir, daß $\mathfrak{v}$ auf σ Null sein soll, so fallen alle Glieder fort außer

$$-c\int[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n d\sigma = \int \mathfrak{S}_n d\sigma,$$

wo $\mathfrak{S}$ der Poyntingsche Strahlungsvektor ist.

Rechts ergibt sich:

$$\int\left\{\mathfrak{E}\frac{\partial \varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t}+\mathfrak{H}\frac{\partial \mu\mathfrak{H}}{\partial t}\right\}dS+\int\lambda\mathfrak{E}^2 dS+\int\mathfrak{v}(\mathfrak{E}\cdot\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}+\mathfrak{H}\cdot\operatorname{div}\mu\mathfrak{H})dS$$
$$+\frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial \varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t}[\mu\mathfrak{H},\mathfrak{v}]-\frac{\partial \mu\mathfrak{H}}{\partial t}[\varepsilon\mathfrak{E},\mathfrak{v}]\right)dS$$
$$+\frac{1}{c}\int\mathfrak{v}\left(\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}[\mu\mathfrak{H},\mathfrak{v}]-\operatorname{div}\mu\mathfrak{H}[\varepsilon\mathfrak{E},\mathfrak{v}]\right)dS$$
$$+\frac{1}{c}\int\lambda\mathfrak{E}[\mu\mathfrak{H},\mathfrak{v}]\,dS.$$

Rechts stehen also 6 Integrale. Auf das vierte wenden wir (f) an und bringen $\mathfrak{v}$ aus dem Vektorprodukt heraus; es ergibt sich

$$\frac{1}{c}\int\mathfrak{v}\left\{\left[\frac{\partial \varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t},\ \mu\mathfrak{H}\right]+\left[\varepsilon\mathfrak{E},\frac{\partial \mu\mathfrak{H}}{\partial t}\right]\right\}dS=\frac{1}{c}\int\mathfrak{v}\frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon\mathfrak{E},\mu\mathfrak{H}]\cdot dS.$$

Das fünfte verschwindet wegen (g), das sechste wird wegen (f)

$$\frac{1}{c}\int\mathfrak{v}\,[\lambda\mathfrak{E},\mu\mathfrak{H}]\,dS;$$

also ist

$$-\int\mathfrak{S}_n d\sigma=\int\lambda\mathfrak{E}^2 dS+\int dS\left\{\mathfrak{E}\frac{\partial \varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t}+\mathfrak{H}\frac{\partial \mu\mathfrak{H}}{\partial t}\right\} \tag{1}$$
$$+\int dS\cdot\mathfrak{v}\left\{\mathfrak{E}\cdot\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}+\mathfrak{H}\operatorname{div}\mu\mathfrak{H}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon\mathfrak{E},\mu\mathfrak{H}]+\frac{1}{c}[\lambda\mathfrak{E},\mu\mathfrak{H}]\right\}.$$

Die Energie der Volumeinheit ist

$$w=\frac{\varepsilon\mathfrak{E}^2}{2}+\frac{\mu\mathfrak{H}^2}{2}, \tag{2}$$

also ist

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{1}{2}\mathfrak{E}^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\frac{\partial \mu}{\partial t}+\varepsilon\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}+\mu\mathfrak{H}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{3}$$

Nun ist aber $\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\mu}{dt}=0$, weil ε und μ an der Materie haften, also wegen Kap. II § 7 (2)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=-\mathfrak{v}\operatorname{grad}\varepsilon,\quad \frac{\partial \mu}{\partial t}=-\mathfrak{v}\operatorname{grad}\mu, \tag{4}$$

ferner ist bei partieller Differentiation

$$\begin{aligned} \varepsilon\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\,\varepsilon\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{E}\frac{\partial\varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t}, \\ \mu\mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\,\mu\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}\frac{\partial\mu\mathfrak{H}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{5}$$

Addition ergibt

$$\varepsilon\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \mu\mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = 2\frac{\partial w}{\partial t} - \left(\mathfrak{E}\frac{\partial\varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{H}\frac{\partial\mu\mathfrak{H}}{\partial t}\right). \tag{6}$$

(4) und (6) in (3) eingesetzt, ergibt

$$-\tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2\mathfrak{v}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\mathfrak{v}\cdot\operatorname{grad}\mu + \frac{\partial w}{\partial t} = \mathfrak{E}\frac{\partial\varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{H}\frac{\partial\mu\mathfrak{H}}{\partial t}. \tag{7}$$

Mit Hilfe dieser Formel wird (1)

$$-\int\mathfrak{S}_n d\sigma = \int\lambda\mathfrak{E}^2 dS + \int\frac{\partial w}{\partial t}\,dS + \int dS\,\mathfrak{v}\Big\{\mathfrak{E}\cdot\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2\operatorname{grad}\varepsilon$$

$$+\,\mathfrak{H}\operatorname{div}\mu\mathfrak{H} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\operatorname{grad}\mu + \tfrac{1}{c}[\lambda\mathfrak{E},\mu\mathfrak{H}] + \frac{\partial}{\partial t}\tfrac{1}{c}[\varepsilon\mathfrak{E},\mu\mathfrak{H}]\Big\}. \tag{8}$$

Nach dem Energieprinzip muß nun aber die elektromagnetische Energie W abnehmen entsprechend der ausgestrahlten Energie $\int\mathfrak{S}_n d\sigma$, der erzeugten Jouleschen Wärme $\int\lambda\mathfrak{E}^2 dS$ und der bei den Verschiebungen von den Kräften des Systems geleisteten Arbeit.

Ist die Kraft auf die Volumeinheit $\mathfrak{f}$, so ist die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$A = \int\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{v}\cdot dS. \tag{9}$$

Also muß gelten

$$-\frac{dW}{dt} = \int\mathfrak{S}_n d\sigma + \int\lambda\mathfrak{E}^2 dS + \int dS\cdot\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{f}. \tag{10}$$

Vergleich von (10) mit (8) ergibt

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{E}\cdot\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{E}^2\operatorname{grad}\varepsilon + \mathfrak{H}\cdot\operatorname{div}\mu\mathfrak{H} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{H}^2\operatorname{grad}\mu$$

$$+\,\tfrac{1}{c}[\lambda\mathfrak{E},\,\mu\mathfrak{H}] + \tfrac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon\mathfrak{E},\,\mu\mathfrak{H}]. \tag{11}$$

Die ersten beiden Terme geben die Kräfte des elektrostatischen Feldes, das dritte und vierte Glied die des magnetostatischen Feldes, das vorletzte Glied ist eine Kraft auf einen

durchströmten Leiter im Magnetfeld, sie wirkt senkrecht zum Strom und zum Magnetfeld.

Im Vakuum ist

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0; \quad \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0; \quad \operatorname{grad} \varepsilon = 0;$$
$$\operatorname{grad} \mu = 0; \quad \lambda = 0; \quad \varepsilon = 1; \quad \mu = 1;$$

also ist dort

$$\mathfrak{f} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}. \tag{13}$$

Es wirken bei veränderlicher Strahlung Kräfte auf Raumteile, in denen keine Materie ist, es müßten also unendlich große Beschleunigungen hier auftreten, was auf einen Fehler in den Grundgleichungen hinweist. Diesen Mangel vermeiden die Theorien von Lorentz und Cohn.

Aus § 7 (1) und (2) sieht man, daß für bewegte Körper die unveränderten Maxwellschen Gleichungen gelten, wenn das Koordinatensystem mit dem bewegten Körper fest verbunden ist, es muß also der Träger der elektromagnetischen Störungen, der Äther, sich nach Hertz mit der Materie mitbewegen.

Die Erscheinungen der Aberrationen und das Dopplersche Phänomen kann man außer anderen Vorgängen infolgedessen nicht nach Hertz erklären, denn sie beruhen auf der Bewegung des Beobachters gegen den Äther. In diesem Paragraphen ist die Kraft im elektromagnetischen Felde aus der Energie des ganzen Feldes abgeleitet. Es ist also nicht sicher, ob die Energie richtig lokalisiert ist durch die Annahme des obigen Kraftausdrucks, d.h. ob die Strahlung in jedem materiellen Volumteil den richtigen Wert $c\,[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ bekommt; dieser Nachweis läßt sich erbringen, er würde aber hier zu weit führen.

§ 9.

Induktion in einer rotierenden Kugel.

Aus den Hertzschen Gleichungen wollen wir die Induktionsströme ableiten, welche entstehen, wenn eine leitende Kugel um

einen Durchmesser mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einem konstanten Magnetfelde $\mathfrak{H}$ rotiert.

Wir wählen die Rotationsachse zur Achse eines räumlichen Polarkoordinatensystems r, ϑ, φ.

Der Leiter sei homogen, d. h. ε, μ, λ seien im ganzen Leiter konstant. Ferner sei im Inneren des Leiters kein wahrer Magnetismus, also

$$\operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0. \tag{1}$$

Schließlich warten wir den stationären Zustand ab, so daß auch

$$\frac{\partial \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \mu \mathfrak{H}}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Da die Geschwindigkeit nur eine konstante Rotation um die Achse $\vartheta = 0$ ist, so ist

$$\mathfrak{v}_r = 0, \quad \mathfrak{v}_\vartheta = 0, \quad \mathfrak{v}_\varphi = \omega r \sin \vartheta. \tag{3}$$

Die Hertzschen Gleichungen § 7 (3) und (4) gehen über in

$$\operatorname{rot} \{c\mathfrak{H} - [\varepsilon \mathfrak{E}, \mathfrak{v}]\} = \mathfrak{v} \cdot \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} + \lambda \mathfrak{E} \tag{4}$$

$$- \operatorname{rot} \{c\mathfrak{E} + [\mu \mathfrak{H}, \mathfrak{v}]\} = 0. \tag{5}$$

Bilden wir die Divergenz von (4), so wird wegen (l)

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} + \operatorname{div} (\mathfrak{v} \cdot \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E}) = 0.$$

Anwendung von (s) ergibt

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} + \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{v} + \mathfrak{v} \cdot \operatorname{grad} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0. \tag{6}$$

Da es sich um die Bewegung eines starren Körpers handelt, gilt die Inkompressibilitätsbedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0. \tag{7}$$

Berücksichtigen wir ferner (3), so schreibt sich das skalare Produkt im Polarkoordinatensystem (vgl. Kap. III § 2 (1)

$$\mathfrak{v} \operatorname{grad} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = \omega \cdot r \sin \vartheta \frac{\partial}{r \sin \vartheta \partial \varphi} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E},$$

also

$$\frac{\lambda}{\varepsilon} \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} + \omega \frac{\partial \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E}}{\partial \varphi} = 0. \tag{8}$$

Wir setzen div $\varepsilon \mathfrak{E} = \varrho$, multiplizieren (8) mit $\varrho d\varphi$ und integrieren von 0 bis 2π. Der zweite Term ist ein vollständiges Differential, das Integral zwischen 0 und 2π verschwindet deshalb. Es entsteht

$$\frac{\lambda}{\varepsilon}\int_0^{2\pi} \varrho^2 d\varphi + \frac{\omega}{2}\Big|\varrho^2\Big|_0^{2\pi} = 0. \tag{9}$$

Da aber das erste Integral einen wesentlich positiven Integranden hat, so folgt

$$\varrho = \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E} = 0. \tag{10}$$

Aus (5) folgt durch Integration wegen (m)

$$c\mathfrak{E} + [\mu \mathfrak{H}, \mathfrak{v}] = \operatorname{grad} V, \tag{11}$$

wo V ein willkürlicher (Integrations-)Skalar ist.

Bilden wir die div von (11) und benutzen (10), so wird

$$\Delta V = \operatorname{div} [\mu \mathfrak{H}, \mathfrak{v}]. \tag{12}$$

Nach (p) ist aber

$$\operatorname{div} [\mu \mathfrak{H}, \mathfrak{v}] = (\mu \mathfrak{v}, \operatorname{rot} \mathfrak{H}) - (\mu \mathfrak{H}, \operatorname{rot} \mathfrak{v}). \tag{13}$$

Wir wollen uns nun auf die Induktion erster Ordnung beschränken, d. h. $\frac{|\mathfrak{v}|}{c}$ als unendlich kleine Größe auffassen, dann können wir $\mathfrak{H}$ gleich dem ursprünglich gegebenen, gleichförmigen Feld setzen, es ist also rot $\mathfrak{H} = 0$; ferner ist nach Kap. III § 5 (5) rot $\mathfrak{v}$ gleich der doppelten Rotationsgeschwindigkeit, einem Vektor, der die Richtung $\vartheta = 0$, also die der z-Achse hat.

Liegt $\mathfrak{H}$ senkrecht zur Rotationsachse, z. B. parallel der x-Achse, so ist $(\mu \mathfrak{H}, \operatorname{rot} \mathfrak{v}) = 0$, also ist (13) Null und aus (12) folgt

$$\Delta V = 0. \tag{14}$$

Da an der Oberfläche der Kugel ($r = r_0$) die Normalkomponente der Strömung $\lambda \mathfrak{E}$ verschwinden muß (denn sonst

würde sich dort unendlich viel Elektrizität anhäufen), so folgt aus (11):

für $r = r_0$ muß sein $$\frac{\partial V}{\partial r} = [\mu \mathfrak{H}, \mathfrak{v}]_r. \tag{15}$$

(15) ergibt $$\frac{\partial V}{\partial r} = \mu \mathfrak{H}_\vartheta \mathfrak{v}_\varphi - \mu \mathfrak{H}_\varphi \mathfrak{v}_\vartheta. \tag{16}$$

Nun gilt aber (3), ferner ist

$$\mathfrak{H}_\vartheta = |\mathfrak{H}| \cos\varphi \cos\vartheta, \tag{17}$$

also ist für $r = r_0$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \mu |\mathfrak{H}| \omega r \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi. \tag{18}$$

Durch $\Delta V = 0$ in S und $\frac{\partial V}{\partial r}$ auf σ ist aber grad V eindeutig gegeben (cf. Kapitel II § 5).

(18) drückt aus, daß für $r = r_0$ keine Radialkomponente des Stromes vorhanden ist. Wir wollen einmal versuchen, ob wir diese Annahme in der ganzen Kugel machen dürfen.

Dann gilt (18) für alle Werte von r, und es ergibt sich durch Integration nach r

$$V = \frac{\mu |\mathfrak{H}| \omega}{2} r^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi = \frac{\mu |\mathfrak{H}| \omega}{2} xz. \tag{19}$$

Da durch diesen Wert (18) selbstverständlich, aber auch (14) erfüllt ist, so ist wegen der Eindeutigkeit (19) der gesuchte Wert, und es ist in der ganzen Kugel

$$\mathfrak{E}_r = 0. \tag{20}$$

Ferner folgt aus (11)

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= \frac{\mu}{c} \frac{\omega}{2} |\mathfrak{H}| z, \\ \mathfrak{E}_y &= 0, \\ \mathfrak{E}_z &= -\frac{\mu}{c} \frac{\omega}{2} |\mathfrak{H}| x. \end{aligned} \tag{21}$$

Die Induktionsströme verlaufen in Kreisen, deren Ebenen parallel der Rotationsachse und der Feldrichtung sind.

Daß ein Magnetfeld in Richtung der Rotationsachse kein elektrisches Feld gibt, erkennt man aus der zweiten Maxwellschen Gleichung in der Integralform sofort, da es keine Fläche σ gibt, durch welche infolge der Drehung die Anzahl der hindurchtretenden $\mu \mathfrak{H}$-Linien verändert wird.

§ 10.

Die Lorentzsche Elektronentheorie.

Nach Lorentz' Annahme gibt es keinen Leitungsstrom $\lambda\mathfrak{E}$, er wird ersetzt durch Konvektionsstrom bewegter geladener Teilchen, Elektronen. Ferner gibt es weder Dielektrizitätskonstante noch Permeabilität als Grundbegriffe, sie werden durch das Verhalten der in der Materie befindlichen Elektronen definiert.

Nach Lorentz ruht der Äther, das bedeutet: Die Maxwellschen Gleichungen bleiben unverändert in einem ruhenden Koordinatensystem.

Sie lauten also, wenn $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor der Elektronen gegen ein im Äther ruhendes Koordinatensystem bedeutet,

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v}, \tag{1}$$

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0. \tag{4}$$

Die Kraft $\mathfrak{f}$ auf die Volumeinheit setzt sich zusammen aus der elektrischen Kraft $\varrho\mathfrak{E} = \mathfrak{E} \cdot \operatorname{div} \mathfrak{E}$ und der magnetischen Kraft $\frac{1}{c}[\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]$ entsprechend $\frac{1}{c}[\lambda\mathfrak{E}, \mu\mathfrak{H}]$ bei Maxwell-Hertz. Es ist also

$$\mathfrak{f} = \varrho\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\varrho\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]. \tag{5}$$

(1) bis (5) bilden die Grundlage der Lorentzschen Theorie.

Wir wollen die Arbeit ∂A bilden, die in der Zeit dt durch die Verschiebung $\mathfrak{v} \cdot dt$ von den Kräften $\mathfrak{f}$ im Raume S geleistet wird:

$$\partial A = \int_S \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} \cdot dt \cdot dS \tag{6}$$

oder

$$\frac{\partial A}{dt} = \int_S \mathfrak{f} \cdot \mathfrak{v} \cdot dS = \int \varrho \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{v} \cdot dS. \tag{7}$$

Die magnetische Kraft leistet wegen (g) keine Arbeit.

Wir multiplizieren (1) skalar mit $\mathfrak{E}$, (2) mit $\mathfrak{H}$, addieren und integrieren über einen Raum S mit der Oberfläche σ, dann wird

$$-c\int_\sigma [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]_n d\sigma = \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2}{2} dS + \int \varrho \mathfrak{v}\cdot\mathfrak{E} dS. \tag{8}$$

Setzen wir

$$c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}] = \mathfrak{S} \tag{9}$$

$$\int \frac{\mathfrak{E}^2+\mathfrak{H}^2}{2} dS = W. \tag{10}$$

und benutzen (7), so folgt

$$\frac{\partial A}{dt} + \int \mathfrak{S}_n d\sigma = -\frac{\partial W}{\partial t}. \tag{11}$$

Das Energieprinzip ist gewahrt: Die Abnahme der elektromagnetischen Energie in der Zeiteinheit geht auf Kosten der ausgestrahlten Energie $\mathfrak{S}$ und der geleisteten Arbeit.

Bilden wir die div von (1), so folgt:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathfrak{v}) = 0. \tag{12}$$

(12) heißt die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität; sie hat dieselbe Form wie die der Hydrodynamik § 1 (3).

§ 11.

Umformung der Lorentzschen Gleichungen.

Die in § 10 gegebenen Lorentzschen Gleichungen gelten für ein im Äther ruhendes System. Da wir unsere Experimente auf der bewegten Erde anstellen, ist es für viele Zwecke wünschenswert, die Gleichungen auf ein mit der Materie bewegtes System zu beziehen. Die Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ sei konstant.

Die Lorentzschen Gleichungen lauten für das ruhende System in der Integralform

$$c\int \mathfrak{H} d\mathfrak{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{E}_n d\sigma + \int \varrho \mathfrak{v}_n d\sigma \tag{1}$$

$$-c\int \mathfrak{E} d\mathfrak{s} = \frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{H}_n d\sigma, \tag{2}$$

wenn $\mathfrak{v}$ die Elektronengeschwindigkeit, bezogen auf den Äther, bedeutet.

Die Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ braucht nicht mit der der Elektronen $\mathfrak{v}$ übereinzustimmen. Z. B. in durchströmten Leitern kommt zur Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ des Leiters noch die Geschwindigkeit $\mathfrak{v} - \mathfrak{w}$ der Elektronen relativ zum Leiter hinzu.

Führen wir anstatt $\frac{\partial}{\partial t}$ die Differentiation $\frac{d}{dt}$ mit Hilfe von Kap. II § 7 (3) ein, so erhalten wir

$$c\int \mathfrak{H}\, d\mathfrak{s} = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{E}_n d\sigma - \int \varrho\, \mathfrak{w}_n d\sigma - \int \mathrm{rot}_n [\mathfrak{E}\cdot\mathfrak{w}] d\sigma + \int \varrho\, \mathfrak{v}_n d\sigma \quad (3)$$

$$-c\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{s} = \frac{d}{dt}\int \mathfrak{H}_n d\mathfrak{s} - \int \mathrm{rot}_n [\mathfrak{H}, \mathfrak{w}] d\sigma. \quad (4)$$

Anwendung des Stokesschen Satzes auf die linke Seite ergibt

$$\mathrm{rot}\,\{c\mathfrak{H} + [\mathfrak{E}, \mathfrak{w}]\} = \frac{d\mathfrak{E}}{dt} + \varrho\,(\mathfrak{v} - \mathfrak{w}) \quad (5)$$

$$-\mathrm{rot}\,\{c\mathfrak{E} - [\mathfrak{H}, \mathfrak{w}]\} = \frac{d\mathfrak{H}}{dt}. \quad (6)$$

$\frac{d}{dt}$ bedeutet Differentiation bei konstanten mitbewegten Koordinaten, $\mathfrak{v} - \mathfrak{w}$ ist die Elektronengeschwindigkeit, bezogen auf das mitbewegte System.

(5) und (6) wollen wir auf die Elektrostatik auf unserer Erde anwenden. Es ist also $\frac{d}{dt} = 0$; $\mathfrak{v} - \mathfrak{w} = 0$. Ferner dürfen wir $\mathfrak{w}$ als konstant der Größe und Richtung nach auffassen. Es folgt aus (5) und (6)

$$\mathrm{rot}\,\{c\mathfrak{H} + [\mathfrak{E}, \mathfrak{w}]\} = 0, \quad (7)$$

$$\mathrm{rot}\,\{c\mathfrak{E} - [\mathfrak{H}, \mathfrak{w}]\} = 0, \quad (8)$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = \varrho, \quad (9)$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0. \quad (10)$$

Wir führen die neuen Vektoren ein

$$\mathfrak{H} + \left[\mathfrak{E}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right] = \mathfrak{H}' \quad (11)$$

$$\mathfrak{E} - \left[\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right] = \mathfrak{E}'. \quad (12)$$

Dann ist $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} - \left[\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right] = \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathfrak{H}\right] = \mathfrak{f}$ die Kraft auf die Elektrizitätsmenge 1; zur elektrischen Kraft kommt noch die magnetische Kraft auf die durch den Äther mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ bewegte Elektrizität hinzu.

Es folgt also aus (7) und (8)

$$\text{rot}\, \mathfrak{H}' = 0. \tag{13}$$

$$\text{rot}\, \mathfrak{E}' = 0. \tag{14}$$

(9) ergibt

$$\text{div}\, \mathfrak{E}' = \varrho - \text{div}\left[\mathfrak{H}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right] = \varrho - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}, \text{rot}\, \mathfrak{H}\right). \tag{15}$$

Wegen (11) und (13) ist aber

$$\text{rot}\, \mathfrak{H} = -\,\text{rot}\left[\mathfrak{E}, \frac{\mathfrak{w}}{c}\right] = +\frac{\mathfrak{w}}{c} \cdot \text{div}\, \mathfrak{E} - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\, \text{grad}\right) \mathfrak{E}. \tag{16}$$

Also wird (15)

$$\text{div}\, \mathfrak{E}' = \varrho\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\right)^2\right) + \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}, \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\, \text{grad}\right)\mathfrak{E}\right). \tag{17}$$

Wollen wir Größen vernachlässigen, die mit $\left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\right)^2$ multipliziert sind, so dürfen wir in (19) $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}'$ setzen; ferner wollen wir die Erdgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ in die x-Achse des Koordinatensystems legen und wegen (14)

$$\mathfrak{E}' = -\,\text{grad}\, \Phi \tag{18}$$

setzen. Dann wird

$$\Delta \Phi - \frac{\mathfrak{w}^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\varrho\left\{1 - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\right)^2\right\}, \tag{19}$$

oder

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\right)^2\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\varrho\left(1 - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\right)^2\right). \tag{20}$$

Bilden wir den ursprünglich vorgelegten Raum S ab auf einen Raum S' durch die Transformation

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

und lassen wir entsprechenden Raumelementen dieselbe Elektrizitätsmenge innewohnen, also

$$\varrho' = \varrho \sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\right)^2},$$

so genügt nach (20)

$$\Phi' = \frac{\Phi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mathfrak{w}}{c}\right)^2}}$$

der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} = -\varrho', \tag{21}$$

d. h. in diesem neuen Raume S' ist Φ' das gewöhnliche Potential der Verteilung ϱ'; durch die Transformationsformeln ist dann auch Φ gegeben.

Einer Fläche $\Phi' = \text{const}$ im transformierten Raum entspricht eine Fläche $\Phi = \text{const}$ im nicht transformierten Raum. Einem Raumteil S', in dem keine elektrische Kraft ist ($\Phi' = \text{const}$), entspricht ein Raumteil S im nicht transformierten Raum, in dem $\Phi = \text{const}$, in dem also nach (18) $\mathfrak{E}' = 0$ ist, d. h. auch jetzt keine Kraft auf die Elektronen ausgeübt wird, denn

$$\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{w}}{c}, \mathfrak{H}\right]$$

ist die Kraft auf die Elektrizitätsmenge 1.

§ 12.
Die retardierten Potentiale.

Es handelt sich darum, Integrale der Lorentzschen Gleichungen zu finden, wenn die Elektrizitätsverteilung und die Geschwindigkeit der Elektronen gegeben ist.

Wegen § 10 (4) dürfen wir setzen

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Setzen wir dies in § 10 (2) ein, so erhalten wir

$$\text{rot}\left(c\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{2}$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \text{grad } \Phi. \tag{3}$$

Setzen wir (1) und (3) in § 10 (1) ein, so erhalten wir

$$c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v}, \tag{4}$$

oder wegen (o)

$$-c \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{A} + c\Delta \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varrho \mathfrak{v}. \tag{5}$$

Setzen wir noch der Einfachheit halber

$$c \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0^1), \tag{6}$$

so wird (5)

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c}\varrho \mathfrak{v}. \tag{7}$$

Setzen wir (3) in § 10 (3) ein, so wird

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \varrho. \tag{8}$$

div $\mathfrak{A}$ ersetzen wir mit Hilfe von (6) und erhalten

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\varrho. \tag{9}$$

Wir haben also das Gleichungssystem (7) und (9). Aus Φ und $\mathfrak{A}$ ergeben sich $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{E}$ durch (1) und (3). Φ heißt das skalare, $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential. Es handelt sich um die Integration von (7) und (9), wenn ϱ und $\mathfrak{v}$ als Funktionen des Ortes und der Zeit gegeben sind.

(7) und (9) sind unter der Form

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -f \tag{10}$$

zusammenfaßbar.

Nach dem Fourierschen Theorem können wir f als Funktion von t folgendermaßen darstellen[2]):

1) Denken wir uns für den Augenblick $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gegeben, und ist $\mathfrak{A}_0$ und Φ_0 irgendein Wertepaar, welches (1) und (3) befriedigt, so ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \operatorname{grad} X$$
$$\Phi = \Phi_0 - \frac{1}{c}\frac{\partial X}{\partial t}$$

für einen beliebigen Wert von X auch ein solches Wertepaar.

Gleichung (6) oder, was dasselbe ist

$$-\Delta X + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathfrak{A}_0 + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \tag{6'}$$

bestimmt X näher.

2) cf. H. Weber, Partielle Differentialgleichungen Bd. II S. 190. Braunschweig 1901.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, e^{i\alpha(t-\lambda)} d\lambda \tag{11}$$

und ebenso

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} U(\lambda) e^{i\alpha(t-\lambda)} d\lambda. \tag{12}$$

Also ist wegen (10)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha(t-\lambda)} d\lambda \left\{ \Delta U(\lambda) + \frac{\alpha^2}{c^2} U(\lambda) + f(\lambda) \right\} = 0. \tag{13}$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch

$$\Delta U(\lambda) + \frac{\alpha^2}{c^2} U(\lambda) = - f(\lambda). \tag{14}$$

Aus Kap. III § 3 (17) ergibt sich das Integral

$$U(\lambda) = \int \frac{dS}{4\pi r} e^{\pm i \frac{\alpha}{c} r} f(\lambda). \tag{15}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (12) ein, so ergibt sich mit Vertauschung der Integrationsfolge:

$$U(t) = \int \frac{dS}{4\pi r} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\alpha\left(t \pm \frac{r}{c} - \lambda\right)} d\lambda. \tag{16}$$

(16) ist aber wegen (11)

$$U(t) = \int \frac{dS}{4\pi r} f\left(t \pm \frac{r}{c}\right). \tag{17}$$

Da nun U nicht von den Zuständen abhängen kann, die erst später $\left(\text{zur Zeit } t + \frac{r}{c}\right)$ vorkommen, so verwerfen wir das $+$ Zeichen und haben als Lösung

$$U(t) = \int \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi r} dS. \tag{18}$$

Aus (7) und (9) ergibt sich also

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\varrho v}{4\pi r} dS, \tag{19}$$

$$\Phi = \int \frac{\varrho}{4\pi r} dS. \tag{20}$$

Die Striche über den Größen sollen andeuten, daß das Argument nicht t, sondern $t - \frac{r}{c}$ ist.

(19) und (20) heißen wegen dieser Zurückdatierung auch die retardierten Potentiale.

Es fehlt noch der Nachweis, daß (6) erfüllt ist. Wegen (19) und (20) ist

$$Z = c \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int dS \left\{ \operatorname{div}_p \frac{\varrho \mathfrak{v}}{r} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\bar{\varrho}}{r} \right\}. \tag{21}$$

Nun ist $\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$ zu unterscheiden von $\frac{\partial U}{\partial t}$ und $\frac{\partial U}{\partial x}$; ersteres bedeutet, daß man anstatt t zuerst $t - \frac{r}{c}$ setzen soll und dann die Differentiation ausführen; letzteres bedeutet eine Differentiation nach t resp. x und nachherige Ersetzung von t durch $t - \frac{r}{c}$.

Da bei der Differentiation nach t x, y, z konstant bleiben, ist

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial U}{\partial t}}. \tag{22}$$

Dagegen ist

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial U}{\partial x}} - \frac{1}{c} \overline{\frac{\partial U}{\partial t}} \frac{x - \xi}{r}$$

oder in Vektorschreibweise

$$\operatorname{grad} \bar{U} = \overline{\operatorname{grad} U} - \frac{1}{c} \overline{\frac{\partial U}{\partial t}} \cdot \frac{\mathfrak{r}}{r}, \tag{23}$$

denn $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ kann als Vektor mit den Komponenten $x - \xi$, $y - \eta$, $z - \zeta$ aufgefaßt werden.

Da in $\overline{\varrho \mathfrak{v}}$ in (21) die Variablen x, y, z durch die laufenden Koordinaten ξ, η, ζ des Integrationsgebietes S ersetzt sind, so sind x, y, z nur noch in $\bar{\varrho} \bar{\mathfrak{v}}$ enthalten, weil das Argument $t - \frac{r}{c}$ vorkommt; es ist

$$\operatorname{div}_p \frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{r} = \overline{\varrho \mathfrak{v}} \operatorname{grad}_p \frac{1}{r} - \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\varrho} \bar{\mathfrak{v}}}{\partial t} \cdot \frac{\mathfrak{r}}{r^2},$$

also

$$Z = \frac{1}{4\pi} \int dS \left\{ \bar{\varrho} \bar{\mathfrak{v}} \operatorname{grad}_p \frac{1}{r} - \frac{1}{c} \overline{\frac{\partial \varrho \mathfrak{v}}{\partial t}} \frac{\mathfrak{r}}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial t} \right\}. \tag{24}$$

Ferner ist $$\operatorname{grad}_p \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_{p'} \frac{1}{r}$$

(cf. Kap. III § 4), folglich mit Einsetzung dieser Gleichung und Anwendung von (s) auf den ersten Term

$$Z = \frac{1}{4\pi}\int dS\left\{-\operatorname{div}_{p'} \frac{\varrho \mathfrak{v}}{r} + \frac{1}{r}\operatorname{div}_{p'} \overline{\varrho \mathfrak{v}} - \frac{1}{c}\frac{\overline{\partial \varrho \mathfrak{v}}}{\partial t}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r^2} + \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial \varrho}}{dt}\right\}. \quad (25)$$

Ferner ist

$$\operatorname{div}_{p'} \overline{\varrho \mathfrak{v}} = \overline{\operatorname{div}_{p'} \varrho \mathfrak{v}} + \frac{1}{c}\frac{\overline{\partial \varrho \mathfrak{v}}}{\partial t}\frac{\mathfrak{r}}{r}, \quad (26)$$

also

$$Z = \frac{1}{4\pi}\int dS\left\{-\operatorname{div}_{p'} \frac{\overline{\varrho \mathfrak{v}}}{r} + \frac{1}{r}\overline{\operatorname{div}_{p'} \varrho \mathfrak{v}} + \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial \varrho}}{\partial t}\right\}. \quad (27)$$

Das erste Glied verwandelt sich durch Anwendung des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral über eine im Unendlichen befindliche Fläche; es verschwindet, da $\varrho \mathfrak{v}$ im Unendlichen verschwinden soll. Die Summe der letzten beiden Glieder verschwindet wegen § 10 (12).

Also ist

$$Z = c \operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Der einzige Unterschied von (19) und (20) gegen die in Kap. III § 4 aufgestellten Potentiale ist die Zurückdatierung. (20) bedeutet also:

Um das Potential Φ zur Zeit t im Punkte p zu erhalten, kommen in den verschiedenen Raumpunkten nicht die zur Zeit t vorhandenen Dichten ϱ in Betracht, sondern die zu der Zeit $t - \frac{r}{c}$ vorhandenen; d. h. zu einer so viel früheren Zeit, wie die Störung braucht, um von p' nach p zu gelangen; denn elektromagnetische Störungen pflanzen sich mit der Lichtgeschwindigkeit c fort.

Zu den Integralen (19) und (20) kommen beim Vorhandensein äußerer Felder noch Lösungen der Gleichungen

$$\Delta \Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

resp.

$$\Delta \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 0$$

hinzu.